Львівський національний університет

Лекція 2

Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами

Зміст

Об'єктом нашого дослідження буде частковий, але важливий, випадок лінійних систем

$$\dot{x} = A\,x + b(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

коли матриця A є сталою, незалежною від часу. Цю систему називатимемо *лінійною неоднорідною системою зі сталими коефіцієнтами*, а систему

$$\dot{x} = A\,x, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

— відповідною *однорідною*.

Зрозуміло, що всі результати теорії лінійних систем із змінними коефіцієнтами залишаються справедливими і у цьому випадку. Однак, звуження об'єкту дослідження зазвичай дає змогу глибше і детальніше його описати. Основна мета розділу — показати, що *кожна система зі сталими коефіцієнтами має фундаментальну матрицю в класі елементарних функцій.* Більш того, цей клас обмежується поліномами, експонентами та їх добутками.

1. Експонента матриці

Мотивацією до побудов цього параграфу будуть два спостереження. По-перше, матриці порядку 1 – це числа. Тому матриці вищих порядків можна трактувати як узагальнення поняття числа. Але для чисел, дійсних чи комплексних, будується відповідна теорія функцій дійсної чи комплексної змінної. І хоча множина матриць $M(n,\mathbb{C})$ при $n > 1$ не є полем, а лише некомутативним кільцем з одиницею, побудується теорія функцій матричного аргументу.

По-друге, лінійне рівняння $\dot{x} = ax$ зі сталим коефіцієнтом a має розв'язок $x(t) = e^{at}$. Узагальненням цього рівняння в кільці матриць є система (2), точніше матричне рівняння 1.11 зі сталою A. Це інспірує до побудови математичного об'єкту e^{tA}, де A – матриця, і аргументації, що він має безпосередній стосунок до системи (2).

Нехай A – квадратна матриця порядку n з комплексними коефіцієнтами. Як відомо, множина $M(n,\mathbb{C})$ є лінійним нормованим простором з нормою

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1} (Ay, y).$$

Тут $(\cdot,\cdot)$ – ермітовий скалярним добуток в $\mathbb{C}^n$, а верхня грань береться за всіма одиничними векторами $y \in \mathbb{C}^n$.

***Означення* 1.** Матриці $A \in M(n,\mathbb{C})$ поставимо у відповідність елемент простору $M(n,\mathbb{C})$, який є сумою матричного ряду

$$e^A = I + A + \tfrac{1}{2!}A^2 + \cdots + \tfrac{1}{k!}A^k + \cdots. \tag{3}$$

Матриця e^A називається *матричною експонентою.*

Очевидно, що для нульової матриці $e^{O} = I$, а для одиничної — $e^{I} = eI$. Справді, для кожного числа α

$$e^{\alpha I} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\alpha^k}{k!}\right) I = e^{\alpha} I. \tag{4}$$

Означення матричної експоненти вимагає доведення його коректності, а саме, перевірки збіжності ряду. Однак, ряд (3) є збіжним, оскільки він мажорується збіжним числовим рядом:

$$\|I + A + \tfrac{1}{2!}A^2 + \cdots + \tfrac{1}{k!}A^k\| \leqslant 1 + \|A\| + \tfrac{1}{2!}\|A\|^2 + \cdots + \tfrac{1}{k!}\|A\|^k \leqslant e^{\|A\|}$$

для кожного натурального k. Такий ряд називають також *абсолютно збіжним*[†]. Вивчимо властивості матричної експоненти.

***Властивість* 1.** *Для кожної матриці $A \in M(n,\mathbb{C})$ справедлива рівність*

$$e^A = \lim_{m\to\infty} \left(I + \tfrac{1}{m}A\right)^m. \tag{5}$$

Доведення. Формулу (5) можна трактувати як ще одне означення експоненти матриці. А саме доведення є демонстрацією еквівалентності цих двох означень. Відомо, що $(1+\frac{a}{m})^m \to e^a$, коли $m \to \infty$, для кожного дійсного числа a, а також

$$\left(1 + \frac{a}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(\frac{a}{m}\right)^k.$$

Розглянемо матричний ряд

$$e^A - \left(I + \tfrac{1}{m}A\right)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{k!} - C_m^k \tfrac{1}{m^k}\right) A^k, \tag{6}$$

де $C_m^k = 0$ при $k > m$. Цей ряд очевидно є збіжним, бо відрізняється від збіжного ряду e^A лише на поліном стосовно A. Крім того, всі числові коефіцієнти ряду (6) є невід'ємні, бо

$$\frac{1}{k!} \geqslant \frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdots \frac{m-k+1}{m} \cdot \frac{1}{k!} = C_m^k \frac{1}{m^k}.$$

Нехай тепер $a = \|A\|$, тоді

$$\|e^A - \left(I + \tfrac{1}{m}A\right)^m\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{k!} - C_m^k \tfrac{1}{m^k}\right) a^k = e^a - (1 + \tfrac{a}{m})^m \to 0$$

[†] Кажуть, що ряд з елементів нормованого простору *абсолютно збігається*, якщо збігається числовий ряд, складений з норм цих елементів

при $m \to \infty$, що завершує доведення. □

Властивість 2. *Якщо матриці A та B комутують, тобто $AB = BA$, то*
$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A.$$

Доведення. Ця властивість перевіряється безпосереднім множенням абсолютно збіжних рядів, яке є коректним. Справді,
$$\begin{aligned} e^A \cdot e^B = \left(I + A + \tfrac{1}{2!}A^2 + \cdots\right) \cdot \left(I + B + \tfrac{1}{2!}B^2 + \cdots\right) \\ = I + (A+B) + \tfrac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2) + \cdots, \end{aligned} \tag{7}$$
$$e^{A+B} = I + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(A+B)^k + \cdots. \tag{8}$$
Якщо матриці комутують, то всі коефіцієнти рядів (7) та (8) збігаються, а також очевидно, що тоді матриці e^A та e^B комутують. Якщо ж A та B не комутують, то вже треті доданки рядів відрізняються, бо
$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$
□

Властивість 3. $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

Доведення. Скориставшись властивістю 1 та неперервністю визначника, отримаємо
$$\det e^A = \det\left(\lim_{m\to\infty}\left(I + \tfrac{1}{m}A\right)^m\right) = \lim_{m\to\infty} \det\left(I + \tfrac{1}{m}A\right)^m$$
Тепер покладемо $\varepsilon = \frac{1}{m}$ в лемі 1.3:
$$\det e^A = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{\operatorname{tr} A}{m} + O(m^{-2})\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{\operatorname{tr} A}{m}\right)^m = e^{\operatorname{tr} A}.$$
Отже, експонента e^A є завжди невиродженою матрицею. □

Властивість 4. $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

Доведення. Зрозуміло, що матриці A та $-A$ комутують. Згідно властивості 2 маємо $e^A \cdot e^{-A} = e^{-A} \cdot e^A = e^{A-A} = e^O = I$. □

Доведені вище властивості засвідчують природність такого узагальнення експоненти, оскільки воно успадковує основні властивості числової експоненти. Зауважимо також, що *експонента дійсної матриці також буде дійсною матрицею.*

Властивість 5. *Експоненти подібних матриць є подібними матрицями, а саме, якщо $A = H^{-1}BH$, то $e^A = H^{-1}e^B H$.*

Доведення. Спершу зауважимо, що
$$(H^{-1}BH)^k = \underbrace{(H^{-1}BH)(H^{-1}BH)\dots(H^{-1}BH)}_{k \text{ раз}} = H^{-1}B^kH.$$
А тому, коли матриці A та B подібні, маємо
$$e^A = e^{H^{-1}BH} = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}(H^{-1}BH)^k = H^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}B^k\right)H = H^{-1}e^B H.$$
□

Властивість 6. *Для кожної невиродженої матриці B існує така матриця $A \in M(n, \mathbb{C})$, що $B = e^A$. Матрицю A називають логарифмом матриці B і пишуть $A = \ln B$.*

Зауваження 1. Цю властивість ми залишаємо без доведення, але зауважимо, що *логарифм матриці визначений неоднозначно і не кожна дійсна матриця має дійсний логарифм.* І справа тут не у специфіці матриць. Просто матричний логарифм успадковує "погані риси" комплексного логарифма $\operatorname{Ln} z$. Як відомо, ця функція є багатозначна і не всяке дійсне число має дійсний логарифм. Так $\operatorname{Ln}(-1)$ приймає будь-яке із значень $\{(2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$, оскільки $e^{(2k+1)\pi i} = -1$, і серед цих значень — жодного дійсного. Правда, додатні числа x таки мають дійсний логарифм $\ln x$. Одна з достатніх умов існування дійсного логарифма для дійсної матриці: усі власні значення цієї матриці повинні бути додатними.

2. Фундаментальна матриця

Повернемося до вивчення лінійних систем зі сталими коефіцієнтами.

Теорема 2.1. *Матриця $X(t) = e^{tA}$ є фундаментальною матрицею лінійної однорідної системи $\dot{x} = A\,x$.*

Доведення. Оскільки експонента e^{tA} є невиродженою матрицею, до достатньо довести, що вона задовольняє матричне рівняння

$$\tfrac{d}{dt} e^{tA} = A\, e^{tA}. \tag{9}$$

Зауважимо, що ряд

$$e^{tA} = I + tA + \tfrac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \tfrac{t^k}{k!}A^k + \cdots \tag{10}$$

є рівномірно збіжний за змінною t на кожній обмеженій множині $[-b, b]$. Скористаємося ознакою Веєрштраса. Справді, для кожного натурального k маємо

$$\|I + tA + \tfrac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \tfrac{t^k}{k!}A^k\| \leqslant 1 + |t|\,\|A\| + \tfrac{|t|^2}{2!}\,\|A\|^2 + \dots + \tfrac{|t|^k}{k!}\,\|A\|^k \leqslant$$
$$\leqslant 1 + b\,\|A\| + \tfrac{b^2}{2!}\,\|A\|^2 + \dots + \tfrac{b^k}{k!}\,\|A\|^k \leqslant e^{b\|A\|}.$$

Продиференціюємо почленно ряд (10):

$$\tfrac{d}{dt} e^{tA} = A + t\,A^2 + \tfrac{t^2}{2!}\,A^3 + \dots + \tfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,A^k + \dots =$$
$$= A(I + t\,A + \tfrac{t^2}{2!}\,A^2 + \dots + \tfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,A^{k-1} + \cdots) = A\,e^{tA}.$$

Оскільки продиференційований ряд також рівномірно збіжний на кожній обмежені множині, то формула (9) доведена. □

Тоді оператор Коші матиме вигляд $U(t,\tau) = e^{(t-\tau)A}$, оскільки

$$U(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau) = e^{tA}e^{-\tau A} = e^{(t-\tau)A}.$$

Очевидно, що всі матриці вигляду $e^{t_1 A}$, $e^{t_2 A}$ комутують. Результати попереднього розділу для систем зі сталими коефіцієнтами тепер можна конкретизувати.

Теорема 2.2. *(i) Загальний розв'язок однорідної системи $\dot{x} = A\,x$ має вигляд*

$$x(t) = e^{tA}\,c,$$

де c – довільний вектор з $\mathbb{C}^n$, а формула

$$\varphi(t) = e^{(t-t_0)A}\, x_0,$$

дає розв'язок задачі Коші $\dot{x} = A\,x,\ x(t_0) = x_0$.
(ii) Частковий розв'язок неоднорідної системи знаходиться за формулою

$$\psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\, b(s)\, ds,$$

а формула розв'язку задачі Коші $\dot{x} = A\,x + b(t),\ x(t_0) = x_0$ є такою

$$\varphi(t) = e^{(t-t_0)A}\, x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\, b(s)\, ds.$$

Для кожного $t \in \mathbb{R}$ оператор $U(t,0) = e^{tA}$ з дійсною матрицею A є невиродженим перетворенням простору $\mathbb{R}^n$, що описує еволюцію станів системи вздовж її траєкторій за час t.

Лема 1. *Сім'я експонент $\mathcal{E} = \{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ є* однопараметричною комутативною групою *перетворень простору $\mathbb{R}^n$.*

Доведення. Ми вже бачили вище, дві експоненти e^{tA}, e^{sA} комутують. Тоді їх композиція $e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$ знову належить до $\mathcal{E}$. Одиницею групи $\mathcal{E}$ є тотожний оператор $I = e^{0A}$, а також завжди існує обернене перетворення $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$. □

Зауваження 2. Не лише лінійні систем породжують однопараметричні групи перетворень. Ця так звана *групова властивість* притаманна і широкому класу нелінійних систем — динамічним системам. Однопараметричні групи є ефективним апаратом дослідження багатьох задач.

Зауваження 3. Експонента e^{tA} – це фундаментальна матриця системи (2), нормована в нулі. Якщо Ψ деяка інша фундаментальна матриця системи, то експонента знаходиться за формулою

$$e^{tA} = \Psi(t)\Psi^{-1}(0). \tag{11}$$

Зокрема, експоненту матриці A можна знайти так: $e^{A} = \Psi(1)\Psi^{-1}(0) = U(1,0)$. У деяких книгах формулу $e^{A} = U(1,0)$ приймають за означення експоненти матриці.

3. Алгоритм побудови експоненти e^{tA}

Зараз ми запропонує алгоритм знаходження фундаментальної матриці системи (2) і доведемо основну тезу цього розділу, що таку матрицю завжди можна отримати в класі елементарних функцій. Побудова експоненти e^{A} матриці A чи сім'ї експонент e^{tA} опирається на алгебраїчну інформацію про цю матрицю. Зараз A доречно трактувати як матрицю деякого лінійного оператора $\mathcal{A}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ в стандартній базі. В інших базах цьому оператору відповідають інші матриці, подібні одна одній. Однак, власні значення, а також їх алгебраїчна та геометрична кратності, які ми визначимо далі, не залежать від вибору бази, ще кажуть, є інваріантами оператора. Вся потрібна нам інформація про $\mathcal{A}$ міститься в його так званій нормальній формі — матриці оператора у деякій спеціально вибраній базі.

З лінійної алгебри відомо, що кожна матриця $A \in M(n,\mathbb{C})$ подібна блочно-діагональній матриці

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix} \tag{12}$$

де кожен блок J_p, $p = 1,\dots,s$, має вигляд

$$J(\lambda,m) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{13}$$

з одним із власних значень λ матриці A на головній діагоналі та одиничною наддіагоналлю. Решта елементів блоку є нульовими, а m – порядок цього блоку. Матриця $J(\lambda,m)$ називається *елементарною жордановою кліткою*, а $\mathcal{J}$ — *жордановою нормальною формою* матриці A. Зауважимо, що кожне власне значення обов'язково присутнє хоча б в одному блоці, але йому можуть відповідати і декілька блоків. Для блочно-діагональних матриць на кшталт $\mathcal{J}$ будемо використовувати компактний запис $\mathcal{J} = \operatorname{diag}\{J_1,\, J_2,\dots,J_s\}$.

Отже, існує така невироджена матриця H, що $A = H^{-1}\mathcal{J}H$. Зрозуміло, що тоді $tA = H^{-1}(t\mathcal{J})H$ для кожного t, а згідно властивості 5 експоненти матриці матимемо

$$e^{\,tA} = H^{-1}e^{\,t\mathcal{J}}H. \tag{14}$$

Степені блочно-діагональної матриці $\mathcal{J}$ також є блочно-діагональні

$$\mathcal{J}^k = \operatorname{diag}\left\{J_1^k,\, J_2^k,\dots,J_s^k\right\}.$$

З цієї причини експонента матриці $t\mathcal{J}$ матиме вигляд

$$e^{\,t\mathcal{J}} = \operatorname{diag}\left\{e^{\,tJ_1},\, e^{\,tJ_2},\dots,e^{\,tJ_s}\right\}. \tag{15}$$

Отже, достатньо показати як побудувати експоненту однієї жорданової клітки.

Жорданову клітку $J(\lambda,m)$ можна записати як суму

$$J(\lambda,m) = \lambda I + N,$$

де матриця $N = J(0,m)$ має одиничну наддіагональ, а решта її елементів – нулі. Тоді

$$e^{\,tJ(\lambda,m)} = e^{\,\lambda tI + tN} = e^{\,\lambda tI}e^{\,tN} = e^{\lambda t}e^{\,tN},$$

оскільки $e^{\,\lambda tI} = e^{\,\lambda t}I$ згідно (4). Матриця N є нільпотентною, тобто її степені, починаючи з деякого номера, є нульовими матрицями. А саме, легко переконатися, що для степенів k, менших за m, маємо

$$N^k = \begin{array}{cl} \scriptstyle \Rsh\ (k+1)\text{-й стовпець} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & 0 & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \longrightarrow \scriptstyle (m-k)\text{-й рядок} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Тобто матриця N^k має коротку одиничну діагональ, яка зсувається в бік правого верхнього кута з ростом k. Зокрема, N^{m-1} має єдиний ненульовий елемент – одиницю у правому верхньому куті. Коли ж $k \geqslant m$, то $N^k = O$. Це означає, що експонентою матриці tN є матричний полін:

$$e^{tN} = I + tN + \tfrac{t^2}{2!}\, N^2 + \cdots + \tfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}\, N^{m-1}.$$

Остаточно, матимемо

$$e^{tJ(\lambda,m)} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2 1}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & 1 & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Отже, елементами матриці $e^{tJ(\lambda,m)}$ є добутки експоненти $e^{\lambda t}$ та поліномів, найвищий степінь яких на одиницю менший розміру жорданової клітки.

Взявши до уваги формули (12)-(16), можемо підсумувати все пророблене вище.

Теорема 2.3. *Нехай $\{\lambda_p\}_{p=1}^r$ — різні власні значення матриці A, $r \leqslant n$. Тоді елементами фундаментальної матриці e^{tA} є лінійні комбінації функцій $t^s e^{\lambda_p t}$, а найвищий степінь полінома, який міститимуть ці елементи, дорівнює зменшеному на одиницю найбільшому розміру кліток $J_1, J_2, \ldots, J_s$ у жордановій структурі матриці A.*

Запропонований алгоритм є досить елегантним з теоретичної точки зору. Однак, на практиці виникає технічна проблема — знаходження матриці H. Насправді, щоб побудувати фундаментальну матрицю, достатньо лише знайти базу, в якій оператор має жорданову нормальну форму, але ні матриці H, ні нормальної форми $\mathcal{J}$ отримувати у явному вигляді не конче.

4. Реалізація алгоритму

Для цілісності викладу нагадаємо читачеві деякі факти з лінійної алгебри. Хоча вище ми не раз користувалися поняттям власного значення, почнемо саме з його означення.

Означення 2. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ називається *власним значенням* матриці A, якщо алгебраїчна система

$$Ah = \lambda h \tag{17}$$

має нетривіальний розв'язок h. Цей розв'язок називається *власним вектором* матриці A, що відповідає власному значенню λ.

Оскільки однорідна система $(A - \lambda I)h = 0$ має ненульовий розв'язок тоді і лише тоді, коли матриця $A - \lambda I$ є виродженою, то всі власні значення є коренями так званого *характеристичного рівняння*

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{18}$$

Цей визначник є поліном за змінною λ степеня n, а тому згідно основної теореми алгебри кожна матриця має не більше n різних власних значень.

Означення 3. Нехай λ – власне значення матриці A. Кратність λ як кореня характеристичного рівняння (18) називається *алгебраїчною кратністю* власного значення λ. Максимальна кількість лінійно незалежних власних векторів, що відповідають λ, називається *геометричною кратністю* цього власного значення. Ці кратності позначатимемо відповідно $m_a(\lambda)$ та $m_g(\lambda)$.

Зауваження 4. Ця ж основна теорема алгебри каже, що сума алгебраїчних кратностей усіх власних значень дорівнює n — розміру матриці A. Себто характеристичне рівняння (18) допускає факторизацію

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}=0,$$

де $m_1+\cdots+m_s=n$. Тут $m_k=m_a(\lambda_k)$.

Для $B\in M(n,\mathbb{C})$ вимірність підпростору $\ker B$ називають також *дефектом* матриці B. Дефект $d(B)$ обчислюється за формулою $d(B)=n-\operatorname{rank}B$. Тому геометрична кратність $m_g(\lambda)$ власного значення λ дорівнює дефекту матриці $A-\lambda I$, тобто

$$m_g(\lambda)=n-\operatorname{rank}(A-\lambda I).$$

Відомо також, що для геометричної кратності виконується нерівність

$$1\leqslant m_g(\lambda)\leqslant m_a(\lambda).$$

Якщо h – власний вектор, то і кожен вектор ch, де c – ненульове число, також є власним вектором. Тому можна говорити про власні підпростори матриці A.

Означення 4. Усі власні вектори із власним значенням λ утворюють лінійний підпростір $V(\lambda)$ в $\mathbb{C}^n$, який називається *власним підпростором* матриці A. Зрозуміло, що $\dim V(\lambda)=m_g(\lambda)$.

Приклад 1. Розглянемо дві матриці — одиничну матрицю I та жорданову клітку $J(1,n)$ розміру n з одиницями на головній діагоналі. Обидві матриці мають те ж саме характеристичне рівняння $(\lambda-1)^n=0$. Отже, ці матриці володіють лише одним власним значенням $\lambda=1$ алгебраїчної кратності $m_a(1)=n$. Однак, $\operatorname{rank}(I-I)=\operatorname{rank}O=0$, а $\operatorname{rank}(J(1,n)-I)=\operatorname{rank}J(0,n)=n-1$. Тому для одиничної матриці геометрична кратність $m_g(1)$ дорівнює n і збігається з алгебраїчною, а для жорданової клітки — $m_g(1)=1$.

Якщо геометричні кратності всіх власних значень матриці збігаються з їх алгебраїчними, то матриця є подібна діагональній. У протилежному випадку, в нормальній формі виникають нетривіальні жорданові клітки — клітки розміру 2 та більше.

Лема 2. *Нехай λ є власним значенням матриці A з власним вектором h. Тоді вектор-функція $\psi(t)=e^{\lambda t}h$ є розв'язком однорідної системи* (2).

Доведення. Безпосередньо переконуємося, що

$$\dot\psi=\tfrac{d}{dt}(e^{\lambda t}h)=e^{\lambda t}\lambda h\overset{(17)}{=}e^{\lambda t}Ah=A(e^{\lambda t}h)=A\psi.$$

□

У цьому параграфі нам зручніше формулювати результати на мові фундаментальних систем розв'язків. Нас навіть не турбуватиме питання, чи відповідна фундаментальна матриця буде експонентою e^{tA}, оскільки при потребі її можна знайти за формулою (11). І розпочнемо ми з найпростішого випадку, коли матриця подібна діагональній. Нехай

$$\lambda_1,\,\lambda_2,\ldots,\lambda_n \tag{19}$$

— власні значення матриці $A \in M(n, \mathbb{C})$, перенумеровані із врахуванням їх кратності. Це означає, що наприклад, трикратне власне значення у послідовності (19) з'явиться тричі з різними номерами.

Теорема 2.4. *Якщо для матриці A можна знайти n лінійно незалежних власних векторів $h_1, \ldots, h_n$, що відповідають власним значенням (19), то загальний розв'язок однорідної системи (2) матиме вигляд*

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} h_n, \tag{20}$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – довільні комплексні сталі.

Доведення. Фактично, треба довести, що вектори $\varphi_k = e^{\lambda_k t} h_k$, $k = 1, \ldots, n$, утворюють фундаментальну систему розв'язків. Те, що кожен з них є розв'язком системи, гарантує лема 2. Крім того, за умовою теореми при $t = 0$ вектори $\varphi_k(0) = h_k$ утворюють базу в $\mathbb{C}^n$. Отже, $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ – фундаментальна система розв'язків згідно критерію фундаментальності (теорема 1.6). □

Тепер розглянемо спеціальний випадок, коли різниця між алгебраїчною і геометричною кратностями є найбільшою. Нехай відомо, що матриця A подібна жордановій клітці $J(\lambda, n)$. Оскільки у подібних матриць однакові власні значення разом з їх кратностями, то A має одне власне значення λ з кратностями $m_a(\lambda) = n$ та $m_g(\lambda) = 1$, як показано у прикладі 1. Отже, у матриці A лише один власний вектор h_1 (з точністю до числового множника). Розглянемо набір лінійних алгебраїчних систем

$$\begin{aligned} &Ah_1 = \lambda h_1, \\ &Ah_2 = \lambda h_2 + h_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Ah_n = \lambda h_n + h_{n-1}. \end{aligned} \tag{21}$$

З лінійної алгебри відомо, що їх можна послідовно розв'язати, починаючи із знаходження власного вектора h_1.

***Означення* 5.** Розв'язки $h_2, \ldots, h_n$ неоднорідних систем (21) називаються *приєднаними векторами* і разом з власним вектором h_1 утворюють так званий *ланцюг $h_1 \mapsto h_2 \mapsto \ldots \mapsto h_n$ власного та приєднаних векторів*, що відповідають власному значенню λ.

Вектори цього ланцюга утворюють базу в $\mathbb{C}^n$. Саме у цій базі наш лінійний оператор (з матрицею A у стандартній базі) має жорданову нормальну форму, що видно із структури правих частин систем (21). Зауважимо, що для вибраного власного вектора h_1 приєднані вектори $h_2, \ldots, h_n$ знаходять неоднозначно, але це є несуттєвим для нашого дослідження.

Лема 3. *Якщо матриця A подібна жордановій клітці $J(\lambda, n)$, то фундаментальна система розв'язків однорідної системи (2) має вигляд*

$$\begin{aligned} &\psi_1(t) = e^{\lambda t} h_1, \\ &\psi_2(t) = e^{\lambda t}\big(t\, h_1 + h_2\big), \\ &\psi_3(t) = e^{\lambda t}\big(\tfrac{t^2}{2!}\, h_1 + t\, h_2 + h_3\big), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\psi_n(t) = e^{\lambda t}\big(\tfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, h_1 + \tfrac{t^{n-2}}{(n-2)!}\, h_2 + \cdots + \tfrac{t}{1!}\, h_{n-1} + h_n\big), \end{aligned} \tag{22}$$

де $h_1 \mapsto h_2 \mapsto \ldots \mapsto h_n$ *– ланцюг власного та приєднаних векторів для власного значення* λ.

Доведення. Введемо векторні поліноми

$$q_k(t) = \tfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\, h_1 + \tfrac{t^{k-2}}{(k-2)!}\, h_2 + \cdots + \tfrac{t}{1!}\, h_{k-1} + h_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Вони при $k \geqslant 2$ володіють такими властивостями

$$\dot q_k = q_{k-1}, \tag{23}$$

$$(A - \lambda I)\, q_k = q_{k-1}, \tag{24}$$

перша з яких є очевидною. Але оскільки $(A-\lambda I)h_1 = 0$, а для решти елементів ланцюга — $(A - \lambda I)h_j = h_{j-1}$, то

$$(A - \lambda I)\, q_k = \sum_{j=1}^{k} \tfrac{t^{k-j}}{(k-j)!}\, (A - \lambda I)\, h_j = \sum_{j=2}^{k} \tfrac{t^{k-j}}{(k-j)!}\, h_{j-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \tfrac{t^{k-1-i}}{(k-1-i)!}\, h_i = q_{k-1}.$$

Вектор ψ_1 є розв'язком системи згідно леми 2. Щодо решти функцій із (22), то

$$\dot\psi_k = \tfrac{d}{dt}(e^{\lambda t} q_k) = e^{\lambda t}(\lambda q_k + \dot q_k) = \overset{(23)}{=} e^{\lambda t}(\lambda q_k + q_{k-1}) \overset{(24)}{=} e^{\lambda t}(\lambda q_k + (A - \lambda I)\, q_k) = e^{\lambda t} A\, q_k = A\psi_k,$$

тобто всі функції (22) є розв'язками. З другого боку, вектори $\psi_k(0) = h_k$ утворюють базу в $\mathbb{C}^n$. Отже, набір (22) є фундаментальною системою. □

Тепер зрозуміло як отримати фундаментальну систему розв'язків для довільної матриці A: знайти власні значення, знайти їх алгебраїчні та геометричні кратності, побудувати всі ланцюги власних та приєднаних векторів, для кожного ланцюга довжини ℓ записати ℓ розв'язків за формулами (22).

Зауваження 5. Однак, для великих розмірностей зреалізувати цей алгоритм є досить складною задачею, і не лише тому, що завжди треба розв'язати n лінійних алгебраїчних систем порядку n. Річ у тім, що число $m_g(\lambda)$ – це кількість ланцюгів (жорданових кліток) для λ, а $m_a(\lambda)$ – це сумарна довжина цих ланцюгів. А от питання про довжину кожного ланцюга, а також з якого саме власного вектора він починається, потребує додаткового дослідження.

Нехай, наприклад, матриця має власне значення алгебраїчної кратності 7 і геометричної — 3. Тоді такому власному значенню обов'язково відповідають 3 ланцюги. Якщо їх довжини позначити через ℓ_1, ℓ_2 та ℓ_3, то можливі всі випадки, при яких $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 7$ і $\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \ell_3 \geqslant 1$. Домовимось, що ланцюг довжини 1 складається лише з власного вектора. Тоді таких випадків (з точністю до перестановки ланцюгів однакової довжини) є чотири: 5+1+1, 4+2+1, 3+3+1, 3+2+2.

Залишаючи сучасним комп'ютерам пошук розв'язків для систем великих розмірів [†], ми проаналізуємо детально випадки $n = 2$ та $n = 3$.

[†] Є кілька потужних пакетів символьних математичних обчислень, наприклад, «Mathematica» чи DERIVE. Але найбільшою популярністю як у математиків-професіоналів, так і студентів, користується пакет Maple, розроблений в університеті Ватерлоо (Канада).

Задача на площині є простою, оскільки матриця A з простору $M(2,\mathbb{C})$ має одну з трьох нормальних форм

$$\text{P1}: \quad \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix} \qquad m_a(\lambda) = m_a(\mu) = 1,$$

$$\text{P2}: \quad \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \qquad m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 2 \qquad \operatorname{rank}(A-\lambda I) = 0,$$

$$\text{P3}: \quad \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \qquad m_a(\lambda) = 2,\ m_g(\lambda) = 1 \qquad \operatorname{rank}(A-\lambda I) = 1.$$

У випадках P1, P2 матриця A подібна діагональній, а тому фундаментальна система розв'язків будується так, як в теоремі 2.4. В третьому випадку матриця подібна жордановій клітці розміру 2 і треба скористатися формулами (22) з леми 3, попередньо знайшовши власний та приєднаний вектори. Випадки P2 та P3 кратного власного значення розрізняє ранг матриці $A - \lambda I$.

***Зауваження* 6.** Рівність $\operatorname{rank}(A-\lambda I) = 0$ означає, що $A = \lambda I$. Справді, клас матриць, подібних до λI, складається з однієї матриці: $H^{-1}(\lambda I)H = \lambda H^{-1}H = \lambda I$. Тому проблеми, як розпізнати випадки P2 і P3, не виникає — нормальну форму P2 має лише система $\dot{x}_1 = \lambda x_1$, $\dot{x}_2 = \lambda x_2$. Та й розв'язати її можна безпосередньо, бо рівняння не пов'язані: $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$, $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$.

Для матриці A з простору $M(3,\mathbb{C})$ жорданових нормальних форм вже більше:

$$\text{S1}: \quad \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \nu\end{pmatrix} \qquad m_a(\lambda) = m_a(\mu) = m_a(\nu) = 1,$$

$$\text{S2}: \quad \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix} \qquad \begin{gathered} m_a(\lambda) = 1 \\ m_a(\mu) = 2,\ m_g(\mu) = 2, \end{gathered}$$

$$\text{S3}: \quad \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & 1\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix} \qquad \begin{gathered} m_a(\lambda) = 1 \\ m_a(\mu) = 2,\ m_g(\mu) = 1, \end{gathered}$$

$$\text{S4}: \quad \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} \qquad m_a(\lambda) = 3,\ m_g(\lambda) = 3 \qquad \operatorname{rank}(A-\lambda I) = 0,$$

$$\text{S5}: \quad \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} \qquad m_a(\lambda) = 3,\ m_g(\lambda) = 2 \qquad \operatorname{rank}(A-\lambda I) = 1,$$

$$\text{S6}: \quad \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} \qquad m_a(\lambda) = 3,\ m_g(\lambda) = 1 \qquad \operatorname{rank}(A-\lambda I) = 2.$$

Базу простору $\mathbb{C}^3$ з власних векторів матриці A можна побудувати у випадках S1, S2 та S4. Знайшовши три лінійно незалежні власні вектори, загальний розв'язок системи (2) будуємо за формулою (20). До речі, все сказане у зауваженні 6 стосується також випадку S4.

Випадок S6 цілком описує лема 3. Розв'язавши послідовно три алгебраїчні системи $Ah_1 = \lambda h_1$, $Ah_2 = \lambda h_2 + h_1$ та $Ah_3 = \lambda h_3 + h_2$, знайдемо ланцюг $h_1 \mapsto h_2 \mapsto h_3$. Тоді фундаментальна система розв'язків матиме вигляд

$$\varphi_1 = e^{\lambda t} h_1, \quad \varphi_2 = e^{\lambda t}\big(th_1 + h_2\big), \quad \varphi_3 = e^{\lambda t}\big(\tfrac{t^2}{2!}\, h_1 + th_2 + h_3\big).$$

У випадках S2 та S3 характеристичне рівняння має простий корінь λ і двократний — μ. Щоб розпізнати їх, треба обчислити ранг матриці $A - \mu I$. Коли $\lambda \neq 0$, то він дорівнює одиниці для S2 і двійці для S3. Коли ж $\lambda = 0$, то ці ранги відповідно менші на одиницю. Розпізнавши S3, обчислюємо власний вектор h_1 для λ і ланцюг $h_2 \mapsto h_3$ для μ. Отже,

$$\varphi_1 = e^{\lambda t} h_1, \quad \varphi_2 = e^{\mu t} h_2, \quad \varphi_3 = e^{\mu t}\big(th_2 + h_3\big). \tag{25}$$

Що ж до випадку S5, то він вимагає додаткового дослідження, про яке йшлося у зауваженні 5. Зрозуміло, розв'язки теж матимуть вигляд (25) з $\mu = \lambda$. Проблема полягає у правильному виборі власного вектора h_2, з якого починається ланцюг $h_2 \mapsto h_3$, оскільки власному значенню λ відповідає двовимірний власний підпростір $V(\lambda)$. Виявляється, що на площині $V(\lambda)$ є лише одна пряма з такою властивістю: до власного вектора можна побудувати приєднаний тоді і лише тоді, коли він лежить на цій прямій.

Виберемо у $V(\lambda)$ деяку базу g_1, g_2. Тоді довільний власний вектор має зображення $\theta_1 g_1 + \theta_2 g_2$. Згідно теореми Кронекера-Капелі система

$$(A - \lambda I)h_3 = \theta_1 g_1 + \theta_2 g_2$$

для приєднаного вектора матиме розв'язок тоді і лише тоді, коли ранг матриці системи збігається з рангом розширеної матриці

$$\operatorname{rank}(A - \lambda I) = \operatorname{rank}(A - \lambda I \mid \theta_1 g_1 + \theta_2 g_2). \tag{26}$$

Остання рівність зв'язує сталі θ_1 та θ_2 лінійним рівнянням $\theta_2 = k\theta_1$. Це і є рівняння шуканої прямої у базі g_1, g_2. Нехай тепер точка (θ_1, θ_2) лежить на цій прямі, покладемо $h_2 = \theta_1 g_1 + \theta_2 g_2$ і знайдемо приєднаний вектор h_3. За h_1 візьмемо будь-який інший вектор з V_λ, лінійно незалежний з h_2. Наприклад, можна покласти $h_1 = \eta_1 g_1 + \eta_2 g_2$, де

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Приклад 2. Розв'яжемо лінійну однорідну систему $\dot{x} = A\,x$ з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

Знайдемо спершу власні значення матриці. Нескладні обчислення дають

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 1 \\ 4 & -8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^3 = 0.$$

Отже, матриця A має трикратне власне значення $\lambda = 1$. Далі

$$\operatorname{rank}(A - I) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix} = 1,$$

бо всі рядки лінійно залежні. А тому $m_g(1) = 3 - \operatorname{rank}(A - I) = 2$ — ми зустрілись з випадком S5. Знайдемо власні вектори $h = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^\top$. Координати кожного розв'язку системи $(A - I)h = 0$ пов'язані умовою $2\theta_1 - 4\theta_2 + \theta_3 = 0$. Отже, вектори

$$h = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 4\theta_2 - 2\theta_1 \end{pmatrix},$$

де сталі θ_1 і θ_2 є довільними, формують власний підпростір $V(1)$. Виберемо у $V(1)$ базу так, щоб один з її векторів буде початком ланцюга довжини 2.

Приєднаний вектор шукається як розв'язок неоднорідної системи

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 4\theta_2 - 2\theta_1 \end{pmatrix}.$$

Немає потреби рахувати ранги матриць у формулі (26), адже і так видно, що система буде сумісною лише коли є однаковими праві частини першого і другого рівнянь, а права частина третього — вдвічі більша за них. Отже, $\theta_1 = \theta_2$, а базу у $V(1)$ можна вибрати таку

$$\underset{\theta_1 = 1,\ \theta_2 = 0}{h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}, \qquad \underset{\theta_1 = \theta_2 = 1}{h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

До другого вектора можна знайти приєднаний:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2\tau_1 - 4\tau_2 + \tau_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Зауважте, що коли в праву частину системи замість h_2 поставити вектор h_1, то вона буде несумісна — несумісні перше та друге рівняння. Тепер, скориставшись формулами (25), побудуємо фундаментальну систему розв'язків

$$\varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2t + 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи у координатному зображенні є таким:

$$\begin{cases} x_1(t) = (c_3 t + c_1 + c_2)e^t, \\ x_2(t) = (c_3 t + c_2)e^t, \\ x_3(t) = (2c_3 t - 2c_1 + 2c_2 + c_3)e^t, \end{cases}$$

де c_1, c_2, c_3 – довільні сталі. Якщо ці сталі є комплексними, то матимемо всі комплексні розв'язки системи, якщо ж сталі дійсні — то всі дійсні.

Однак, питання про дійснозначні розв'язки систем із дійсною матрицею A не завжди вирішується так просто.