Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кафедра математичного і функціонального аналізу

ПОШУКИ КОНТИНУУМУ.

ВСТУП ДО АНАЛІЗУ.

Львів 2013

Пошуки континууму. Вступ до сучасного аналізу. Лекції. – Уклав Т. Кудрик. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 130с.

Лекції про основні напрями в обґрунтуваннях математики та розвиток уявлень про математичний континуум. Для студентів-математиків.

ВСТУП

"There is a tendency in every profession to enveil its mystery for outmen with an incomprehensible language."
"The majority of textbooks are written to hide essence".[1] *(Edward Nelson)*

У лекціях, призначених для студентів-математиків, розглянуто погляди видатних філософів і математиків (Платона, Арістотеля, Лейбніца, Канта, Фреґе, Дедекінда, Рассела, Гільберта, Ґеделя, Брауера, Вейля та інших) на природу математики. Викладено основні сучасні напрями в обґрунтуваннях математики: логіцизм, формалізм, інтуїціонізм. При цьому роз'яснюються найновіші досягнення математики 20-го століття, такі як теорія категорій, елементарні топоси, нестандартний аналіз Робінсона, доведення незалежності тверджень за Коеном. Висвітлено зв'язок між сучасними фізичними і математичними уявленнями про світ. Тут викладення йде за Дж.Беллом (див. [B1]).

У другому розділі наведено деякі погляди про співвідношення між дискретним і неперервним та про розвиток уявлень про континуум. Описані побудови числових систем (гіпердійсних, сюрреальних і супер(-)дійсних чисел), що поглиблюють і розвивають наші уявлення про математичний континуум. Ці побудови узагальнюють відому канторівську процедуру поповнення раціональних чисел (Скулем, Х'юіт, Люксембург), побудову дійсних чисел за допомогою дедекіндових перерізів (Конвей) та побудову Е.Х'юітом множини гіпердійсних чисел (Дейлс і Вудін) відповідно. Роз'яснено основні результати Ґеделя про повноту і неповноту формальних систем. Викладено основні ідеї доведення незалежності континуум-гіпотези від інших аксіом теорії Цермело-Френкеля, а також і інших подібних результатів про незалежність, метод вимушення (форсинґ) Коена (за [Ch]).

Велику увагу приділено історії розвитку уявлень про континуум. Викладення матеріалу доступне для студентів молодших курсів, лише читання §4 може вимагати деяких попередніх знань з логіки, а §§5,7-9 – з теорії множин. Доступний опис результатів Ґеделя і Коена подано радше для загального культурного розвитку студентів і знайомства із цими галузями математики. Пошуки і дослідження математиків і філософів, висвітлені у частині 1, стають прозорими і зрозумілими з перспективи викладених у частині 2 побудов, особливо у §§5,8, які можна вважати у певному сенсі розв'язанням проблеми континууму.

[1] Тому переклад не подається.

ПРО ФІЛОСОФІЮ МАТЕМАТИКИ

Тісний зв'язок між математикою і філософією давно визнаний математиками і філософами. Очевидна позачасовість математичної істини, точність і об'єктивна природа її концепцій, застосовність до явищ емпіричного світу – це деякі з найтонших проблем, що вимагають пояснення філософією. Почнемо із нагадування деяких відомих минулих спроб, здійснених філософами і математиками, щоб пояснити природу математики.

Класичні погляди на природу математики.

Платон (428-347 до н.е.) включав математичні сутності – числа і об'єкти чистої геометрії такі як точки, прямі та кола – до правильно визначених, незалежно існуючих зовнішніх об'єктів, які він називав *формами*. Саме той факт, що математичні твердження посилаються на ці визначені форми, дає змогу таким твердженням бути істинними (або хибними). Математичні твердження про емпіричний світ правильні до тієї міри, що відчутні об'єкти нагадують або проявляють відповідні форми. Платон розглядав математику не як ідеалізацію аспектів емпіричного світу, а радше як *прямий опис дійсності*, тобто світу форм, як він пізнається розумом.

Учень Платона і філософський послідовник *Арістотель* (384-322 до н.е.), з іншого боку, відкинув поняття форм, відділених від емпіричних об'єктів, і стверджував замість цього, що *форми утворюють частини об'єктів*. Форми схоплюються розумом за допомогою процесу *абстрагування* від чуттєвих об'єктів, але вони тим самим не досягають автономного існування, окремого від них. Математика виникає із цього процесу абстрагування; її змістом є тіло ідеалізацій, породжених цим процесом; і математична строгість виникає просто з простоти властивостей цих ідеалізацій. Арістотель відкинув концепцію *актуальної* (або завершеної) *нескінченності*, допускаючи лише *потенційну нескінченність*, тобто таку сукупність, яка скінченна в будь-який заданий момент і росте поза будь-яку наперед задану межу, наприклад послідовність натуральних чисел або процес неперервного поділу прямої.

Лейбніц (1646-1716) поділив всі істинні твердження, включно із математичними, на два типи: *істини факту* і *істини розуму*, відомі також як *умовні* і *аналітичні* істини відповідно. Згідно з Лейбніцем істинні математичні твердження є істинами розуму і їхня істинність тому є просто логічною істиною: їхнє заперечення було би логічно неможливе. Математичні твердження не мають спеціального "математичного" змісту, як вони мали для Платона та Арістотеля, і тому істинні математичні твердження є істинними у всіх можливих світах, тобто вони *необхідно* істинні. (З іншого боку, емпіричні твердження, що містять математичні вирази такі як 2 коти + 3 коти = 5 котів істинні, тому що вони виконуються у *фактичному* світі, і згідно з Лейбніцем це саме так, тому що фактичний світ є "найкращим з усіх можливих". Отож, незважаючи на факт, що $2+3=5$ істинно у всіх можливих світах, 2 коти + 3 коти = 5 котів могло би бути хибним у деякому світі.) Лейбніц прив'язував особливу увагу до *символічних* аспектів математичного міркування. Його програма розвитку *"characteristica universalis"* зосередилася навколо ідеї винаходу методу представлення думок засобами впорядкування букв і знаків таким способом, щоб зв'язки між думками відображалися подібними відношеннями між знаками, що зображають їх. Лейбніц може вважатися попередником логіків і формалістів.

Імануїл Кант (1724-1804) запровадив нову класифікацію істинних тверджень: *аналітичні* та неаналітичні або *синтетичні*, які він потім поділив на емпіричні або *апостеріорні* і неемпіричні або *апріорні*. Синтетичні апріорні твердження не залежать від чуттєвого сприйняття, але є необхідно істинними у тому сенсі, що якщо *будь-які* твердження про емпіричний світ істинні, то вони мусять бути істинними. Згідно з Кантом математичні твердження є синтетичними апріорними, тому що вони у кінцевому підсумку посилаються на *простір і час*. Кант прив'язував особливу увагу до ідеї *апріорної побудови* математичних об'єктів. Він чітко розрізняв математичні *концепції*, які подібно до неевклідових геометрій є просто внутрішньо сумісні, і математичні *об'єкти*, побудова яких зроблена можливою тим фактом, що сприймуваний час і простір мають певну притаманну структуру. Отож, з цього погляду $2+3=5$ треба розглядати у кінцевому підсумку як твердження про певну побудову, виконану у часі і просторі, що включає слідування і набір одиниць. *Логічна можливість* арифметики, у якій $2+3\neq 5$, не заперечується; стверджується лише, що правильність такої арифметики була би несумісною із структурою сприймуваного простору і часу. Тому для Канта твердження чистої арифметики і геометрії є необхідними, але *синтетичними апріорними*. *Синтетичними*, тому що вони у кінцевому підсумку про структуру простору і часу, виявлені через об'єкти, які можна там побудувати. І *апріорними*, тому що структура простору і часу забезпечує універсальні передумови, що роблять можливим сприйняття таких об'єктів. Із цього погляду, *чиста математика* є аналізом структури чистого простору і часу, вільного від емпіричного матеріалу, а *прикладна математика* є аналізом структури простору і часу із доданим емпіричним матеріалом. Подібно до Арістотеля, Кант розрізняє *потенційну і актуальну нескінченність*. Однак Кант не розглядає актуальну нескінченність як логічну неможливість, а радше, подібно до неевклідової геометрії, як *ідею розуму*, внутрішньо сумісну, але ні сприймувану, ні побудовну. Канта можна вважати попередником інтуїціоністів.

Тепер перейдемо до деяких новіших поглядів на природу математики.

§1. Логіцизм

Греки розвинули математику як строгу наочну науку, у якій геометрія займає центральну сцену. Але їм бракувало абстрактної концепції *числа*: вона фактично почала зароджуватися лише у Середні віки і стимулювалася індійськими і арабськими математиками, які визволили концепцію числа з володіння геометрії. Сімнадцяте сторіччя засвідчило дві вирішальні новації, які позначили народження сучасної математики. Перша з них була запроваджена Декартом і Ферма, які відкриттям координатної геометрії досягли успіху в розділених тоді суттєво окремих областях алгебри і геометрії, вистилаючи шлях появі сучасного математичного аналізу. Другою великою новацією, звісно, був розвиток числення нескінченно малих Лейбніцем і Ньютоном.

Однак треба було заплатити певну ціну за ці досягнення. Фактично, вони привели до значного зменшення дедуктивної строгості, на яку опиралася певність грецької математики. Це було особливо правильно в численні, де швидкий розвиток нової ефектно успішної техніки для розв'язування попередньо непіддатливих задач збудив уяву математиків до такої міри, що вони часто відкидали логічну обережність і дозволяли собі нестися духом пригоди. Ключовим елементом у цій техніці була концепція *нескінченно малої величини*, яка, незважаючи на величезну плідність, була логічно дещо сумнівною. На кінець вісімнадцятого сторіччя почав виникати дещо більш обережний підхід до надмінного використання цієї техніки, і в дев'ятнадцятому сторіччі почали здійснюватися серйозні кроки, щоб відновити заплямовану строгість математичних доведень. Ситуація (на 1884р.) підсумована Фреґе в уривку із "Основ арифметики":

> Після полишення на час старих евклідових стандартів, тепер математика повертається до них, і навіть робить спроби йти далі. В арифметиці було традицією міркувати менш строго, ніж у геометрії. Відкриття вищого аналізу послужило лише, щоб підтвердити цю тенденцію; тому що значні, майже нездоланні труднощі стояли на шляху будь-якого строгого трактування цих предметів, натомість малою здавалася винагорода за зусилля, затрачені на їх подолання. Проте наступний розвиток показав більш-менш ясно, що в математиці чисте моральне переконання, підтримане масою успішних застосувань, не є достатньо добрим. Тепер вимагається доведення багатьох речей, які раніше проходили як самоочевидні. Знову і знову таким способом встановлювалися границі цінності тверджень. Було показано, що концепції функції, неперервності, границі і нескінченності потребували точніших означень. Для від'ємних і ірраціональних чисел, які давно допущені в науку, мали бути критично розглянуті їхні вірчі грамоти. У всіх напрямах ці самі ідеали можна було бачити в роботі – строгість доведення, точне визначення міри цінності, і як засіб для цього – точне означення концепцій.

Фреґе і Дедекінд зосередилися на забезпеченні математики строгими означеннями. Вони вважали, що центральні концепції математики були у кінцевому підсумку *логічними* за природою і, подібно до Лейбніца, що істини про ці концепції повинні бути встановлені чисто логічними засобами. Наприклад, Дедекінд стверджував (у передмові до "Природи і значення числа", 1888р.), що

> Я розглядаю концепцію числа як цілковито незалежну від понять чи інтуїцій простору і часу ... негайний результат законів думки.

Отож, якщо традиційно ототожнити логіку із законами думки, Дедекінда ми би тепер назвали *логіцистом* у його підході до природи математики. Дедекіндів "логіцизм" охопив *всі* математичні концепції: концепцію числа – натурального, раціонального, дійсного, комплексного – і геометричні концепції такі як неперервність: фактично саме неточність, що оточувала концепцію неперервності, змусила його взяти на плечі програму критичного аналізу математичних концепцій. Як діючий математик, Дедекінд вніс певну терпимість до того, що мало вважатися "логічним" поняттям – законом думки, як засвідчено його зауваженням, що ми приведені до здатності розуму пов'язувати речі з речами, дозволяти одній речі відповідати іншій або представляти одну річ іншою – здатності, без якої ніяке мислення неможливе. Ця ідея *відповідності* або *функціональності*, взята Дедекіндом як фундаментальна, повинна була стати центральною концепцією *теорії категорій.* Дедекінд не особливо зосереджувався на забезпеченні точного формулювання логічних принципів, що підтримують його міркування, вважаючи, що посилання на самоочевидні "закони думки" було достатнім. Дедекіндів логіцизм у відповідності з цим був менш радикальної і старанної природи, ніж у його сучасника Фреґе, ім'я якого разом із іменем Бертрана Рассела синонімічне з логіцизмом. У своєму логічному аналізі концепції числа Фреґе взявся надати форму у точних деталях мові, всередині якої його логічний аналіз мав бути представлений. Аналіз Фреґе подано у трьох працях:

Begriffsschrift (1879): Опис концепцій, символічна мова чистої думки, модельована мовою арифметики.

Grundlagen (1884): Основи арифметики, логіко-математичне дослідження концепції числа.

Grundgesetze (1893, 1903): Фундаментальні закони арифметики, виведені засобами опису концепцій.

У *Grundgesetze* Фреґе очищує і збільшує символічну мову, запроваджену вперше у *Begriffsschrift* так, щоб розпочати повністю у деталях аналіз концепції числа і виведення фундаментальних законів арифметики. Логічний універсум *Grundgesetze* охоплює два сорти сутностей: *функції* та *об'єкти.* Будь-яка функція f асоціює із кожним значенням ξ її аргумента об'єкт $f(\xi)$: якщо цей об'єкт завжди є одного із двох *значень істинності* 0 (хиба) або 1 (істина), то f називається *концепцією* або *пропозиційною функцією*, і коли $f(\xi) = 0$, ми кажемо, що ξ *не виконується для* концепції f. Якщо дві функції f і g приписують ті самі об'єкти всім можливим значенням їхніх аргументів, ми повинні, природно, сказати, що вони мають той самий *курс значень*; якщо f і g – концепції, ми би сказали, що вони мають той самий *обсяг.* Вирішальний крок Фреґе у *Grundgesetze* полягав у запровадженні нового сорту виразу об'єкта – який ми записуватимемо як $\hat{f}$ – щоб позначити курс значень f і встановити як основний принцип твердження

$$\hat{f} = \hat{g} \leftrightarrow \forall\xi \quad [f(\xi) = g(\xi)]. \tag{1}$$

Обмежуючи увагу до концепцій, можна стверджувати, що *дві концепції мають той самий обсяг точно тоді, коли ті самі сутності не виконуються для них.*

Поняття обсягу концепції підтримує означення Фреґе числа, яке, як він переконливо довів у *Grundlagen*, повинно братися як міра розміру обсягу концепції. [(Корисно думати про обсяг концепції, як клас всіх сутностей, що не виконуються для неї, так що, наприклад, обсягом концепції *червоний* є клас всіх всіх червоних об'єктів. Однак, ні в якому випадку не необхідно ототожнювати обсяги із класами; все, що потрібно знати про обсяги, – це те, що вони є об'єктами, що задовольняють (1).] Він запровадив термін *рівночисельний* для відношень між двома концепціями, що одержується, коли для полів сутностей, що не виконуються для кожної з них, можна встановити взаємно однозначну відповідність. Потім він визначив кардинальне число, ставлячи умову, що кардинальне число концепції F є обсягом концепції *рівночисельний із концепцією* F. Цим способом число асоційоване із концепцією *другого порядку* – концепцією про концепції. Отож, якщо ми пишемо

$\nu(F)$ для так визначеного кардинального числа F, і $F \approx G$ замість *концепція* F *рівночисельна із концепцією* G, то із (1) випливає, що

$$\nu(F) = \nu(G) \leftrightarrow \quad F \approx G. \tag{2}$$

Після цього натуральні числа можна визначити як кардинальні числа таких концепцій:

$$\begin{array}{lll} N_0 : x \neq x & 0 = \nu(N_0) & \\ N_1 : x = 0 & 1 = \nu(N_1) & \\ N_0 : x = 0 \vee x = 1 & 2 = \nu(N_2) & \text{і т.д.} \end{array}$$

У технічному *tour-de-force*[2] Фреґе встановив, що так визначені натуральні числа задовольняють звичайні принципи, які очікувалися від них. На жаль, у 1902р. Фреґе дізнався про *парадокс Рассела*, який можна вивести із його принципу (1) і який показує, що цей принцип *суперечливий*. Парадокс Рассела для множин і класів можна розглядати як прислуговуючий звичайному припущенню, що *будь-яка властивість визначає єдиний клас*, тобто клас всіх об'єктів, що володіють цією властивістю (його "обсяг"). Щоб вивести парадокс у системі Фреґе, класи замінюються обсягами: визначаємо концепцію R так:

$$R(x) \leftrightarrow \quad \exists F \;\; [x = \hat{F} \wedge \neg F(x)]$$

(словами: *x не виконується для концепції R точно тоді, коли x є обсягом деякої концепції, для якої воно не виконується*). Тепер запишемо r для обсягу R, тобто

$$r = \hat{R}.$$

Тоді

$$R(r) \leftrightarrow \quad \exists F \;\; [r = \hat{F} \wedge \neg F(r)]. \tag{3}$$

Тепер припустимо, що $R(r)$ виконується. Тоді для деякої концепції F

$$r = \hat{F} \wedge \neg F(r).$$

Але тоді

$$\hat{F} = r = \hat{R},$$

і тому висновуємо з (1), що

$$\forall x \; [F(x) \leftrightarrow R(x)].$$

Оскільки $\neg F(r)$, із цього випливає, що $\neg R(r)$. Робимо висновок, що

$$R(r) \to \neg R(r).$$

Навпаки, нехай $\neg R(r)$. Тоді

$$r = \hat{R} \wedge \neg R(r),$$

і тому *афортіорі*

$$\exists F \;\; [r = \hat{F} \wedge \neg F(r)].$$

[2] прояв сили або винахідливості

Тепер із означення R випливає, що $\neg R(r)$. Отож, ми показали, що

$$\neg R(r) \to R(r).$$

Приходимо до висновку, що принцип Фреґе (1) дає суперечність

$$R(r) \leftrightarrow \neg R(r).$$

Отож, система Фреґе в *Grundgesetze* у такому вигляді суперечлива. Подальші дослідження показали, що означення натуральних чисел і встановлення основних законів арифметики можна врятувати, відповідним чином обмежуючи (1), так щоб вона стала сумісною, залишаючи все інше непошкодженим. Фактично, необхідно лише зробити (сумісне) припущення, що обсяги певного спеціального виду концепції – числових концепцій (числова концепція виражає рівночисельність із деякою заданою концепцією) – задовольняють (1). Альтернативно можна цілком відмовитися від обсягів і замість цього взяти кардинальне число $\nu(F)$ як первісне поняття, що керується еквівалентністю (2).

Де все це відмовляється від твердження Фреґе (і Дедекінда), що арифметику можна виснувати з логіки? Обидва встановили, поза всяким сумнівом, що арифметику можна формально або логічно вивести із принципів, які не містять ніякого явного посилання на просторовочасові інтуїції. У випадку Фреґе ключовий принцип полягав у тому, що певні концепції мають обсяги, що задовольняють (1). Проте хоча цей принцип не містить посилань на просторовочасову інтуїцію, навряд чи можна стверджувати, що він чисто логічної природи. Тому що це твердження про *існування* і, ймовірно, можна уявляти світ, вільний від об'єктів ("обсягів"), існування яких стверджується. Отож, видається чесним сказати, що в той час як Фреґе (і Дедекінд) досягли успіху, показавши, що концепція і властивості числа є "логічними" у розумінні незалежності від просторовочасової інтуїції, вони не досягли успіху (і як виявиться, і не могли досягти) у показі того, що ці властивості "логічні" у сильнішому лейбніцевому розумінні виконання у кожному можливому світі.

Логіцизм Бертрана Рассела був у певних відношеннях навіть більш радикальним, ніж Фреґе, і ближчим до поглядів Лейбніца. У "Принципах математики" (1903) він стверджує, що математика і логіка *тотожні.* Точніше, він стверджує на початку своєї чудової праці, що

> *Чиста математика – це клас всіх тверджень вигляду "p тягне q", де p і q є певні твердження ... і ні p, ні q не містять будь-яких констант, за винятком логічних констант.*

Монументальні і жахливо незрозумілі "Принципи математики", написані протягом 1910-1913рр. у співробітництві із А.Уайтхедом (1861-1947), містять повну систему чистої математики, що ґрунтується на тому, що задумувалося як чисто логічні принципи, і сформульовано всередині точної символічної мови. Можна дістати уявлення, яка складна ця праця, прочитавши наступний уривок із її огляду у номері журналу "Spectator" (1911р.):

> Легко зобразити страх наївної особи, яка з цікавості дивиться на останню частину книги. Вона натрапить на цілі сторінки без жодного слова

> під заголовком; замість цього вона побачить розсіяні з дикою надмірністю роз'єднані грецькі та латинські букви всіх розмірів, пересипані дужками, крапками і лапками, із стрілками і знаками оклику, і ще з більш фантастичними знаками, для яких вона би з трудністю знайшла назви.

Головною справою "Принципів математики" було уникнення так званих *парадоксів порочного кола*, таких як Рассела і Ґреллінга-Нельсона, що стурбували математиків, зацікавлених в остаточній міцності їхнього предмету. [Парадокс Р. ось у чому. Будемо вважати, що для множини X виконується властивість D тоді і тільки тоді, коли $X \notin X$. Тепер розгланемо множину T таку, що її елементами є точно ті множини X, для яких виконується D. Тоді легко довести, що $T \in T \leftrightarrow T \notin T$.] [Парадокс Ґ.-Н. полягає ось у чому. Тлумачитимемо прикметники "автологічний" і "гетерологічний" так: прикметник є автологічним, якщо і тільки якщо він описує себе. Наприклад, "український" є автологічним, бо це слово "український" є українським (ще приклади: сенсовний, постіндустріальний, неїстивний). "Ускладнений" і "п'ятискладовий" також автологічні. Прикметник гетерологічний, якщо і тільки якщо він не описує себе. Отож, "довгий" є гетерологічним словом, бо є "двоскладовим". Всі прикметники, здається, мусять бути автологічними або гетерологічними, тому що кожний прикметник описує себе або ні. Парадокс виникає, коли розглянемо прикметник "гетерологічний". Можна запитати: чи є "гетерологічний" гетерологічним словом? Якщо відповідь 'так', то "гетерологічний" є автологічним (що приводить до суперечності). Якщо відповідь 'ні', то "гетерологічний" є гетерологічним (знову приводячи до суперечності).] Ще один парадокс – *Беррі*, в одній із форм якого розглянемо фразу *найменше ціле число, не визначуване менше, ніж одинадцятьма словами*. Ця фраза визначає менше, ніж одинадцятьма словами (фактично дев'ятьма) ціле число, яке задовольняє стверджувану умову, тобто що воно не визначуване менше, ніж одинадцятьмя словами. Очевидно, це самосуперечливо.

Якщо ближче дослідити ці парадокси, ми виявимо, що у кожному випадку член визначається неявним посиланням на певний клас або область, що містить член, про який ідеться, ґарантуючи тим самим порочне коло. Отож, у парадоксі Рассела визначена сутність, тобто клас R усіх класів, які не є членами себе самих, одержується, відбираючи із класу V всіх класів *без винятку* ті, які не є членами самих себе. Отож, R визначено в термінах V, але оскільки R є членом V, то V не можна одержати без заданого наперед R. Подібно у парадоксі Ґреллінга-Нельсона означення прикметника *гетерологічний* містить розгляд концепції *прикметник*, для якого концепція *гетерологічний* сама не виконується. А у парадоксі Беррі вираз *найменше ціле число, не визначуване менше, ніж одинадцятьма словами* містить посилання на клас всіх фраз, включно із фразою, що визначає вираз, про який ідеться.

Розв'язок Рассела цих проблем полягав у прийнятті того, що він назвав *принципом порочного кола* і сформулював стисло так: *що завгодно, що містить всю колекцію, мусить не бути одним із колекції*. Ця настанова має ефект виключення не просто самосуперечливих сутностей вищезазначеного сорту, але й *всіх* сутностей, означення яких певного роду циркулярне, навіть тих, таких як клас всіх класів, які не є членами самих себе, прикметник "автологічний", або найменше ціле, визначуване менше, ніж одинадцятьма словами, припущення про існування яких здається не приводить до суперечності. Можна зазначити, що самосуперечлива природа парадоксальних сутностей, які ми описали, виводиться як із появи заперечення у їхніх означеннях, так і циркулярності у цих означеннях.

Принцип порочного кола підказує ідею впорядкування класів або концепцій (пропозиційних функцій) у відмінні один від одного *типи або рівні*, так щоб, наприклад, будь-який клас міг містити тільки класи (або індивіди) нижчого рівня як члени, а пропозиційна функція може мати тільки (об'єкти або) функції нижчого рівня як можливі аргументи. Ідея розшарування класів на типи прийшла до Рассела також у зв'язку із його аналізом класів, як справжніх *множинностей*, на відміну від *цілостей*. Із цього погляду починають із індивідуальних об'єктів (найнижчого типу), їхні множинності охоплюють цілості наступного вищого типу, множинності цих множинностей – цілості наступного вищого типу і т.д. Отож, очевидна відмінність між індивідами і множинностями "спроектована вгору", щоб утворити ієрархію типів.

За обмежень, накладених цією теорією, більше не можна утворювати клас всіх можливих класів як такий, а лише клас всіх класів заданого рівня. Клас, що виникає в результаті, тоді мусить бути вищого типу, ніж кожний із його членів, і тому не може бути своїм членом. Отож, парадокс Рассела не може виникнути. Парадокс Ґреллінґа-Нельсона заблокований, тому що властивість гетерологічності, що містить самозастосування, є недопустима. Однак, на жаль, ця проста теорія типів не руйнує парадокси такі як Беррі, тому що у них визначувана сутність, зрозуміло, того самого рівня, що й сутності, включені в означення. Щоб уникнути парадоксів цього сорту, Рассел тому був змушений запровадити подальший "горизонтальний" поділ цілісності сутностей кожного рівня на те, що він назвав *порядками*, і в яких *спосіб визначення* цих сутностей приймається до уваги. Цілий апарат типів і порядків називається *розгалуженою теорією типів* і утворює хребет формальної системи "Принципів математики".

Щоб висловити грубо ідею, як Рассел уявляв порядки, обмежимо увагу до пропозиційних функцій, що мають аргументами тільки індивідів (типу 0). Будь-яка така функція, яку можна визначити без застосування кванторів до будь-яких інакших змінних, ніж індивідуальні змінні, називається функцією *першого порядку*. Наприклад, пропозиційна функція *усі люблять* x є першого порядку. Функції другого порядку – це ті, означення яких містить застосування кванторів не більше, ніж до індивідів і змінних першого роду, і подібно для функцій третього, четвертого, ..., n-го порядків. Отож, x *має всі якості першого порядку, які утворюють великого філософа* представляє функцію другого порядку і першого типу.

Розрізнення порядку функцій дає змогу мати справу з такими парадоксами, як Беррі. У ньому слово *визначуваний* взяте неправильно, щоб покривати не тільки означення у звичайному розумінні, тобто ті, в яких ніякі функції не з'являються, але також і означення, що містять функції всіх порядків. Замість цього ми мусимо наполягати на уточненні порядків всіх функцій, що фігурують у цих означеннях. Отож, на місці незаконного тепер *найменше ціле число, не визначуване менше, ніж одинадцятьма словами* розглядаємо *найменше ціле число, не визначуване в термінах функцій порядку* n *менше, ніж одинадцятьма словами*. Це ціле число тоді справді не визначуване у термінах функцій порядку n менше, ніж одинадцятьма словами, але визначуване в термінах функцій порядку $n + 1$ менше, ніж одинадцятьма словами. У цьому немає суперечності.

Хоча розгалужена теорія типів долає всі відомі парадокси (і фактично можна довести, що вона сумісна за деяких скромних припущень), виявляється надто слабкою системою, щоб підтримувати розвиток математики. Насамперед, всередині неї не можна довести, що існує нескінченність натуральних чисел або навіть що кожне натуральне число має наступника. Щоб подолати цей недолік, Рассел був змушений запровадити *аксіому нескінченності*, тобто що існує рівень, який містить нескінченно багато сутностей. Однак, навряд чи можна називати її принципом логіки, оскільки, певно, можливо уявити обставини, за яких вона могла би бути хибною. У будь-якому випадку навіть збільшена аксіомою нескінченності розгалужена теорія типів виявляється недостатньою для розвитку базової теорії дійсних чисел. Наприклад, теорема, що кожна обмежена множина дійсних чисел має найменшу верхню межу, на яку опирається цілий математичний аналіз, не виводиться без подальшого посилення для даного випадку теорії, на цей раз припущення про так звану *аксіому звідності.* Вона стверджує, що будь-яка пропозиційна функція будь-якого порядку еквівалентна до деякої функції першого порядку у тому розумінні, що ті самі сутності не виконуються для них. Знову, навряд чи цей принцип можна стверджувати як факт логіки.

Здійснювалися різні спроби позбутися від аксіоми звідності, найзначніша у *Ф.Рамсея* (1903-1930). Його ідея полягала в тому, щоб перетворити весь апарат порядків у надлишковий, виключаючи квантори в означеннях. Отож, він запропонував, щоб універсальний квантор вважався таким, що позначає кон'юнкцію, а квантор існування – диз'юнкцію, хоча на практиці може бути неможливо повністю виписати вирази, які отримуються в результаті. Із цього погляду твердження *"Громадянин Кейн" має всі якості, які творять великий фільм* вважається скороченням чогось типу *"Громадянин Кейн" – це фільм, блискуче зрежисерований, чудово знятий, видатним чином зіграний, відмінно написаний і т.ін.* Для Рамсея розрізнення порядків функцій є просто ускладненням, накладеним структурою нашої мови, а не чимсь, на відміну від ієрархії типів, що притаманне фактичному стану речей. Із цих причин він вважав, що проста теорія типів забезпечить достатню основу для математики.

Який результат всього цього для логіцизму Рассела? Немає сумніву, що Рассел і Уайтхед досягли успіху, показавши, що математику можна вивести всередині розгалуженої теорії типів із аксіом нескінченності і звідності. Це справді велике досягнення, але, як прийняв Рамсей, аксіоми нескінченності і незвідності видаються у кращому випадку можливими істинами. У будь-якому випадку видається дивним засновувати істину математичних тверджень на умові, що у світі існує нескінченно багато індивідів. Отож, подібно до Фреґе, невдале расселове зведення математики до логіки містить незвідний математичний залишок.

§2. Формалізм

У 1899р. *Д.Гільберт* опублікував свою епохальну працю "Grundlagen der Geometrie" ("Основи геометрії"). Без запровадження будь-якого спеціального символізму у цій праці Гільберт сформулював абсолютно строге аксіоматичне трактування евклідової геометрії, відкривши приховані припущення, і заповнюючи логічні прогалини у традиційних викладеннях предмету. Він встановив *сумісність* цієї аксіоматичної системи, показавши, що її можна інтерпретувати (або, як ми би сказали, вона володіє *моделлю*) у системі дійсних чисел. Ще одною важливою властивістю аксіом, що він довів, є їхня *категоричність*, тобто той факт, що з точністю до ізоморфізму вони мають точно *одну* модель, а саме 3-вимірний простір дійсних числових трійок. Хоча Гільберт намагався показати, що геометрія цілком самодостатня як *дедуктивна система* – у цьому зв'язку згадується його відоме зауваження: *у всі часи мусимо бути здатними говорити замість точок, прямих і площин – столи, стільці і пивні кружки* – він все-таки думав, як і Кант, що геометрія у кінцевому підсумку є *логічним аналізом нашої інтуїції простору*. Це можна зрозуміти з епіграфа до його книги, де він цитує відоме кантове зауваження з "Критики чистого розуму":

> ”Людське знання розпочинається з інтуїцій, переходить від них до концепцій і закінчує ідеями”.

Великий успіх методу, який розвинув Гільберт, щоб проаналізувати дедуктивну систему евклідової геометрії – його можна назвати *зробленим строгим аксіоматичним методом* або *метаматематичним методом* – надав йому сміливість пізніше спробувати застосувати його до чистої математики в цілому, забезпечуючи тим самим, як він сподівався, досконалу строгість для всієї математики. З цією метою Гільберт розробив витончену філософію математики, що пізніше стала відома як *формалізм*, яка відрізнялася у певних важливих відношеннях від логіцизму Фреґе і Рассела і видає певні кантівські риси. Її особливість добре передається наступною цитатою із звернення Гільберта у 1927р.:

> ”Математику, не більше ніж будь-яку іншу науку, можна засновувати на самій логіці; радше, як умова для використання логічних висновків і виконання логічних операцій, щось вже мусить бути дано нам у нашій здатності представлення, певні позалогічні конкретні об'єкти, які інтуїтивно присутні як негайний досвід до всього мислення. Якщо логічний вивід повинен бути надійним, мусить бути можливо оглядати ці об'єкти повністю у всіх їхніх частинах, і той факт, що вони з'являються, що вони відрізняються один від одного, і що вони слідують один за одним або поєднані, негайно дається інтуїтивно, разом із об'єктами, як щось, що не можна ні звести ні до чого іншого, ні не вимагає зведення. Це основна філософська позиція, яку я розглядаю, як необхідну річ для математики і загалом для наукового мислення, розуміння і спілкування. І у математиці, зокрема, те, що ми розглядаємо, є самі конкретні знаки, чия форма відповідно до прийнятого розуміння негайно зрозуміла і пізнавана. Це найменше, що треба припускати; ніякий науковий мислитель не може обійтися без цього і тому кожний мусить дотримуватися цього, свідомо чи ні”.

Отож, по суті Гільберт, як і Кант, хотів ґрунтувати математику на описі конкретних просторовочасових конфігурацій, тільки Гільберт обмежує ці конфігурації до конкретних знаків (таких як написи на папері). Ніякі суперечності не можуть виникнути у царстві конкретних знаків, бо точні описи конкретних об'єктів завжди взаємно сумісні. Зокрема, у математиці конкретних знаків актуальна нескінченність не може породити суперечностей, тому що, як і для Канта, ця концепція не може описувати будь-який конкретний об'єкт. Отож, із цього погляду міцність математики випливає у кінцевому підсумку не з *логічного* джерела, а з *конкретного*, таким самим способом, як сумісність правильно повідомлених емпіричних тверджень ґарантується реальністю зовнішнього світу.

Все-таки Гільберт думав також, що прийняття цієї позиції не вимагає відмови від інфінітарної математики Кантора і інших, що виникла у дев'ятнадцятому сторіччі і дала змогу досягти таких захоплюючих успіхів. Відповідно з цим він поставив собі завдання влаштування інфінітарної математики всередині математики, обмеженої до розгортання скінченних конкретних об'єктів. Отож, *програма Гільберта*, як вона стала називатися, мала метою забезпечити нову основу для математики, не обмежуючи її логікою, а замість цього *представляючи її суттєву форму всередині царства конкретних символів*. Як вказує цитата вище, Гільберт вважав, що в кінці кінців повністю надійні, незвідно самоочевидні складники математики є *скінченними*, тобто мають справу тільки із скінченною маніпуляцією оглядуваних областей конкретних об'єктів, зокрема математичних символів, представлених як значки на папері. Математичні твердження, які посилаються лише на конкретні об'єкти у цьому розумінні, він називав *дійсними* або *конкретними* твердженнями, а всі інші математичні твердження розглядав як такі, що володіють *ідеальним* або *абстрактним* зарактером. Отож, наприклад, 2+2=4 вважається дійсним твердженням, натомість *існує непарне досконале число* – ідеальним.

Гільберт вважав ідеальні твердження подібними до ідеальних прямих і точок на нескінченності проективної геометрії. Точно як їх використання не порушує будь-яких істин конкретної геометрії звичайної декартової площини, так і він сподівався показати, шо використання ідеальних тверджень – зокрема із канторової теорії множин – ніколи не приведе до хиб серед дійсних тверджень, або іншими словами таке використання *ніколи не суперечитиме будь-якому самоочевидному факту про конкретні об'єкти*. Встановлення цього строго конкретними і тому безсумнівними засобами було головною метою гільбертової програми. Коротше, його метою було довести сумісність класичної математичної аргументації. Із досягненням цієї мети математики були би вільні необмежено подорожувати в "канторовому раї" (пам'ятна фраза Гільберта – він фактично сказав, що "ніхто ніколи не зможе вигнати нас із раю, створеного для нас Кантором"). Це мало бути досягнуто викладенням математики, як чисто формальної системи символів, позбавлених змісту – тут треба наголосити, що Гільберт не стверджував, що сама (класична) математика була беззмістовною, а тільки що формальна система, яка представляє її, повинна так розглядатися – а потім показуючи, що ніяке доведення у системі не може привести до хибного твердження, наприклад 0=1. Це, у свою чергу, мало бути зроблено *метаматематичною* технікою заміни кожного абстрактного класичного доведення дійсного твердження конкретним скінченним доведенням. Оскільки, очевидно, не може бути ніякого конкретного доведення дійсного твердження 0=1, то не може бути також ніякого класичного доведення цього твердження, і тому класична математична аргументація сумісна.

Як добре відомо, Ґедель похитнув програму Гільберта, довівши у відомих *теоремах про неповноту*, що *завжди будуть дійсні твердження, довідні ідеальними засобами, які не можна довести конкретними засобами.* Він досяг цього засобами винахідливої модифікації давнього *парадоксу брехуна*. Щоб одержати парадокс брехуна у найбільш прозорій формі, розглядають висловлення *це висловлення хибне.* Називаючи це висловлення A, зрозуміло, що A істинне якщо і тільки якщо воно хибне, тобто A *стверджує власну хибність*. Ґедель показав, що якщо в A замінити слово *хибний* фразою *недовідний конкретно*, то твердження B, яке отримуємо, є *істинним* – тобто довідним ідеальними засобами – але *не довідним конкретно*. Це так тому що, як легко зрозуміти, B фактично стверджує власну конкретну недовідність просто тим самим способом, як A стверджує власну хибність. І, продовжуючи такі аргументи, Ґедель досяг успіху в показі того, що сумісність *арифметики* не можна довести конкретними засобами.

Згідно із цим, здається, немає сумніву, що програма Гільберта встановлення сумісності математики (і, зокрема, арифметики) у її *початковій, строгій формі*, як показано Ґеделем, нереалізовна. Проте сам Ґедель думав, що програму встановлення сумісності арифметики можна врятувати за допомогою збільшення області об'єктів, допущених у скінченну метаматематику. Тобто дозволяючи скінченні маніпуляції відповідним чином вибраних абстрактних об'єктів на додачу до конкретних, Ґедель сподівався достатньо посилити скінченну метаматематику, щоб уможливити довідність сумісності арифметики у ній. У 1958р. він досяг цієї мети, побудувавши доведення сумісності для арифметики в скінченній, але не строго конкретній метаматематичній системі, що допускає на додачу до конкретних об'єктів (чисел) абстрактні об'єкти такі як функції, функції функцій і т.д. над скінченними об'єктами. Тому, хоча програму Гільберта не можна виконати у початковій формі, принаймні для арифметики Ґедель показав, що її можна виконати у послабленій формі, допускаючи використання відповідним чином вибраних абстрактних об'єктів.

Щодо самої доктрини "формалізму", Гільберт (який не використовував, між іншим, цей термін) не стверджував, що математику можна ототожнити із формальними аксіоматичними системами. Навпаки, він, здається, розглядав роль формальних систем, як таких, що забезпечують очищення математичної практики до достатнього ступеня точності, щоб уможливити перенесення їхніх формальних рис під гостру увагу. Той факт, що Ґедель досяг успіху в показі того, що певні риси (наприклад, сумісність) цих логічних очищень можна *виразити*, але *не довести* скінченними методами, не руйнує переконливість програми Гільберта.

§3. Інтуїціонізм

Третя тенденція у філософії математики, що виникла у двадцятому сторіччі, *інтуїціонізм*, головно є витвором Л.Брауера (1882-1966). Подібно до Канта Брауер дотримувався ідеалістичного погляду, що математичні концепції допустимі тільки якщо вони належно ґрунтуються на інтуїції і що математичні теорії значущі тільки якщо вони мають справу із сутностями, які вибудувані з чогось, що задано безпосередньо інтуїцією. В "Інтуїціонізмі і формалізмі" (1912), визнаючи, що поява неевклідової геометрії дискредитувала погляд Канта на простір, він стверджував на противагу логіцистам (яких він називав "формалістами"), що арифметика, і тому вся математика мусить виводитися із *інтуїції часу.* За його словами:

> ”Неоінтуїціонізм розглядає розпад моментів життя на якісно різні частини, що об’єднуються тільки тоді, поки залишаються розділеними часом, як фундаментальне явище людського інтелекту, що переходить абстрагуванням із його емоційного змісту в фундаментальне явище математичного мислення, інтуїцію неприкритої дво-єдиності. Ця інтуїція дво-єдиності, базова інтуїція математики,створює не тільки числа один і два, але й всі скінченні порядкові числа, оскільки про один із елементів дво-єдиності можна думати, як про нову дво-єдиність, і цей процес можна повторювати нескінченно; це приводить ще далі до найменшого нескінченного ординала ω. Нарешті, ця базова інтуїція математики, у якій зв’язане і окреме, неперервне і дискретне об’єднані, приводить безпосередньо до інтуїції лінійного континуууму, тобто "між", який невичерпний вставлянням нових одиниць і про який не можна думати, як про просту колекцію одиниць. Цим способом апріорність часу не тільки визначає властивості арифметики як синтетичні апріорні судження, але й робить те саме для геометрії, і не тільки для елементарної двочи тривимірної геометрії, а й для неевклідових і n-вимірних геометрій також. Тому що від Декарта ми навчилися зводити всі ці геометрії до арифметики за допомогою координат”.

Для Брауера інтуїція означала суттєво те саме, що для Канта, а саме уявлення розуму того, що він сам побудував; із цього погляду тільки прийнятні математичні доведення є *конструктивними.* Про конструктивне доведення можна думати як про сорт ”Мисленного експерименту” – тобто виконання експерименту в уяві. Згідно із А.Гейтінгом (1898-1980), провідним членом інтуїціоністської школи,

> ”Інтуїціоністська математика полягає у розумових побудовах; математична теорема виражає чисто емпіричний ифакт, а саме успіх певної побудови. "2+2=3+1" мусимо читати як скорочення твердження "Я здійснив розумові побудови, що вказуються ’2+2’ і ’3+1’, і знайшов, що вони приводять до однакового результату".”

Із таких цитат, як ці, можна виснувати, що для інтуїціоністів математика є чисто суб’єктивною діяльністю, видом саморепортажу, і що кожний математик має особисту математику. Звісно, вони відкидають ідею, що математичне мислення залежить від будь-якого особливого виду мови, навіть деколи стверджуючи, що в кінці кінців математика є "безмовною діяльністю". Все-таки той факт, що інтуїціоністи очевидно розглядають математичні теореми як переконливі для всіх розумних істот, вказує, що для них математика має якщо не об’єктивний характер, то принаймні *транссуб’єктивний.* Головний поштовх програми інтуїціоністів конструктивного доведення був у царстві логіки. Брауер стверджував, фактично, що застосовність традиційної логіки до математики

> ”спричинена історично тим фактом, що, по-перше, класична логіка була абстрагована з математики підмножин визначеної скінченної множини,

по-друге, апріорне існування, незалежне від математики, було приписано логіці, і, нарешті, що на основі цієї припущеної апріорності вона була невиправдано застосована до математики нескінченних множин".

Отож, Брауер вважав, що більшість сучасної математики ґрунтується не на міцній аргументації, а на незаконному продовженні процедур, правильних тільки в обмеженій області скінченного. Тому він розпочав курс на відкладення всієї існуючої математики в сторону і початку всього заново, використовуючи тільки концепції і способи виведення, яким можна дати ясне інтуїтивне виправдання. Він сподівався, що, як тільки буде виконано достатньо програми, можна буде розрізнити логічні закони, яким інтуїтивне або конструктивне математичне міркування фактично підпорядковується, і так змогти порівняти одержану *інтуїціоністську* або *конструктивну* логіку із класичною логікою. (Це не означає, що Брауер був зацікавлений головно *логікою*, далеко не так: насправді його несмак до формалізації змусив його не сприймати дуже серйозно наступні кодифікації інтуїціоністської логіки.)

Найважливішими рисами інтуїціоністського математичного міркування є те, що *твердження про існування можна вважати підтвердженими тільки тоді, коли подано приклад.* (У цьому зв'язку згадується зауваження Г.Вейля про неконструктивні доведення існування, що "вони інформують світ, що скарб існує, не вказуючи його місця".) Як наслідок – *диз'юнкцію можна вважати підтвердженою тільки тоді, коли доведений явно один із елементів.* Вражаючий наслідок цього такий, що якщо йдеться про властивості (потенційно) нескінченних областей, *ні класичний закон виключеного третього, ні закон сильного зведення до абсурду не можна прийняти без уточнення.* Щоб зрозуміти це, розглянемо наприклад твердження про існування *існує непарне досконале число* (тобто непарне число, яке рівне сумі власних дільників), яке запишемо, як $\exists n P(n)$. Його запереченням є $\forall n \neg P(n)$. Класично закон виключеного третього дозволяє нам ствердити диз'юнкцію

$$\exists n P(n) \vee \forall n \neg P(n). \tag{1}$$

Однак конструктивно, щоб ствердити цю диз'юнкцію, ми мусимо *або* бути в стані підтвердити перший елемент $\exists n P(n)$, тобто володіти або мати засоби одержання непарного досконалого числа, *або* підтвердити другий елемент $\forall n \neg P(n)$, тобто володіти доведенням, що ні одне непарне число не є досконалим. Оскільки на даний час математики не мають жодного з них, то диз'юнкція (1) і *афортіорі* закон виключеного третього не є конструктивно допустимий.

Можна думати, що якщо фактично другий елемент в (1) *хибний*, тобто не кожне число фальсифікує P, то можна фактично знайти число, що задовольняє P знайомою процедурою випробування послідовно кожного числа 0,1,2,3,... і перериваючи, коли знайдемо якесь, що задовольняє: іншими словами, що із $\neg\forall n \neg P(n)$ можемо виснувати $\exists n P(n)$. Класично це досконало правильно, тому що класичне розуміння $\neg\forall n \neg P(n)$ у тому, що "$P(n)$ не буде насправді не виконуватися для кожного числа n." Але *конструктивно* це останнє твердження не має змісту, тому що воно припускає, що кожне натуральне число *вже було побудоване* (і перевірено, чи воно задовольняє P). Конструктивно це твердження мусить означати щось типу "можна вивести суперечність із припущення, що можна довести, що $P(n)$ не виконується для кожного n." Із цього, однак, ми, зрозуміло, не можемо витягнути ґарантію, що випробовуючи кожне число за чергою, остаточно знайдемо якесь, що задовольняє P. Тому бачимо, що закон строгого зведення до абсурду також не є конструктивно допустимим.

Отож, бачимо, що конструктивне міркування відрізняється від класичного двійника тим, що воно надає сильніший зміст деяким логічним операторам. Стало звично, слідуючи Гейтінгу, пояснювати цей сильніший зміст у термінах первісного відношення "*a є доведенням p*" між математичними побудовами a і математичними твердженнями p. Стверджувати *істинність* p означає стверджувати, що є побудова a така, що a є доведенням p. [Тут під *доведенням* ми повинні розуміти математичну побудову, що встановлює твердження, про яке йдеться, а не виведення у деякій формальній системі. Наприклад, доведення 2+3=5 у цьому розумінні складається з послідовних побудов 2, 3 і 5, із побудовою, яка додає 2 і 3, і завершується побудовою, що порівнює результат цього додавання із 5.]

Зміст різних логічних операторів у цій схемі пояснюється уточненням, як доведення складних тверджень залежать від доведень їхніх складників. Отож, наприклад,

> a є доведенням $p \wedge q$ означає: a є парою (b, c), що складається із доведення b для p і c для q;
>
> a є доведенням $p \vee q$ означає: a є парою (b, c), що складається із натурального числа b і побудови c такої, що якщо $b = 0$, то c є доведенням p, і якщо $b \neq 0$, то c є доведенням q;
>
> a є доведенням $p \to q$ означає: a є побудовою, що перетворює будь-яке доведення p в доведення q;
>
> a є доведенням $\neg p$ означає: a є побудовою, яка показує, що ні одне доведення p не є можливе.

Легко зрозуміти, що, наприклад, закон виключеного третього не є загалом істинний за такого приписування змісту логічним операторам. Тому що доведенням $p \vee \neg p$ є пара (b, c), у якій c є доведенням p або побудовою, яка показує, що ніяке доведення p не є можливе, і немає нічого притаманного концепції математичної побудови, що би ґарантувало для довільного твердження p, що щось із цього коли-небудь буде здобуто.

Якщо порівняти закон виключеного третього із п'ятим постулатом Евкліда, то інтуїціоністську логіку можна порівняти із *нейтральною* геометрією – геометрією без п'ятого постулата – і класичну логіку із евклідовою геометрією. Точно як неевклідова геометрія відкрила "новий дивний всесвіт", так інтуїціоністська логіка дозволила розрізнити нові риси логіко-математичного ландшафту – невидимі через лінзи класичної логіки. Інтуїціоністська логіка виявилась тонким інструментом, чутливішим, ніж класична логіка, для дослідження математичного світу. Гільберт зауважив на противагу інтуїціонізму, що "перешкоджати математикові у використанні закону виключеного третього означало би перешкоджати астрономові використання телескопа або боксерові його кулаків." Але із досвідом у використанні удосконаленої машинерії інтуїціоністської логіки приходимо до думки про невідповідність гільбертового порівняння. Можна краще: перешкоджати математикові у використанні закону виключеного третього означало би перешкоджати хірургові використання кухонного ножа або генералові – ядерної зброї. Або, як зауважив Крейзель, перешкоджання у використанні закону виключеного третього можна порівняти із перешкоджанням теоретику неабелевої групи використовувати комутативний закон.

Незважаючи на той факт, що логіцизм, інтуїціонізм і формалізм не можуть забезпечити повний звіт про природу математики, кожний із них виражає важливу часткову істину про цю природу: *логіцизм* – що математична істина і логічне доведення ідуть рука в руку; *інтуїціонізм* – що математична діяльність протікає виконанням розумових побудов, *формалізм* – що результати цих побудов представлені за посередництвом формальних символів.

§4. Основоположні схеми для математики

У спробах забезпечити основу для математики чи треба приймати, як першочерговий факт її на вид *об'єктивний* характер, а саме факт, з яким погоджується таким чи інакшим способом кожний математик і який вперше систематично сформульваний Платоном, що її зміст є у певному сенсі *істинний* або *правильний*? Чи треба слідувати Канту, приймаючи суть математики, як породження *певності* у розумі? Тобто, в кінці кінців, математичне знання є самознанням людського розуму. Онтологія чи епістемологія? Реалізм чи ідеалізм?

Зручно розпочати обговорення основополжних схем для математики із відвертої підтримки реалізму Д.Мейберрі. У статті "Що потрібно від основ для математики?" він стверджує, що виклад основ математики мусить встановити наступні чотири речі:

1. Первісні концепції, в яких інші математичні концепції повинні бути визначені.
2. Правила, що керують записуванням означень.
3. Остаточні умови доведень.
4. Правила, що дозволяють просування від умов до бажаних висновків.

Згідно із Мейберрі первісні концепції, що потрапляють під 1, є концепції *канторівської теорії множин*, натомість остаточні умови, що потрапляють під 3, є умови *теорії множин Цермело-Френкеля*: стверджується, що вони володіють самоочевидним характером, потрібним від "остаточних умов". Ця самоочевидність виводиться із самої концепції множини як "просторової множинності визначеного розміру, складеної із властиво розрізнених об'єктів".

Для Мейберрі основа для математики мусить забезпечувати нездоланне доведення *істини* математичних тверджень. Істина математичного твердження, на його погляд, не залежить будь-яким способом від правильності, формальної чи іншої, будь-якого його заявленого доведення або навіть від можливості доведення". Він переконує, що ми повинні бути платоністами принаймні у такому розумінні:

> "Розгляд людської діяльності і здібності, фактичної або ідеалізованої, не має місця в основах математики, і ми тому мусимо робити всі зусилля, щоб вилучити їх із елементів, принципів і методів, на яких маємо намір ґрунтувати нашу математику."

Отож, він захищає цілком *об'єктивний* підхід до основ математики. У той час, як вимога об'єктивності сама не вимагає використання *теорії множин*, треба визнати, що за минуле сторіччя чи трохи більше теорія множин надала офіційну основу для математики – справді, для більшості математиків (які, як відомо, не думають багато про цю справу) – фраза "основи математики" практично є синонімом до "теорії множин". Теорія множин запропонувала остаточні відповіді на *онтологічні* поняття такі як "що таке число?", "що таке функція?" і т.ін. І більшість математиків, ящо їх запитати про остаточну основу для істини математичних тверджень, відповіли би (під тиском), що твердження, про яке йдеться, вивідне із аксіом деякої відповідної теорії множин. Мейберрі відкидає ідею, що будь-яка аксіоматична теорія може служити основою для математики у його розумінні:

> "Ідея, що будь-яка теорія першого порядку могла би виконати цю роль [бути основою для математики] є просто непослідовною. Справді, *ніяка аксіоматична теорія, формальна чи неформальна, першого чи вищого порядку, не може логічно зіграти основоположну роль у математиці.* Тут, звісно, я маю на увазі аксіоматичну теорію у загальноприйнятому сучасному розумінні, у якому теорія груп, теорія кілець, загальна топологія, теорія категорій, теорія топосів, теорія повних упорядкованих полів і теорія просто нескінченних систем – всі є аксіоматичними теоріями. Певно, очевидно, що не можна *використовувати* аксіоматичний метод, щоб *пояснити*, що таке аксіоматичний метод. Оскільки будь-яка така можлива заміна для теорії множин, як основи для математики, мусить забезпечити переконливий виклад аксіоматичного означення, її не можна під загрозою циркулярності саму представити засобами аксіоматичного означення. Тут джерелом всієї плутанини є погляд, що теорія множин є просто ще одною аксіоматичною теорією, а універсум множин – просто ще одною математичною структурою. Універсум множин не є структурою: це світ, який населяють всі математичні структури, море, у якому вони всі плавають. "

Якою би елегантною не була ця морська метаформа Мейберрі, все таки можна запитати: що саме у концепції множини надає їй остаточного авторитету? Белл вважає, що, можливо, наступне:

1. Сучасна концепція множини, розвинута Кантором, є продовженням того, що греки називали *арітмосом* або обмеженою множинністю. Ця концепція дискретної скінченної множинності має об'єктивність, прозорість і визначеність, які, як вважав Кантор, збережуться при продовженні цієї концепції на довільну (тобто нескінченну) множину. Більшість математиків (але ні в якому випадку не всі) погодились із ним.

2. Зусилля Дедекінда і інших математиків 19-го сторіччя зробити математику строгою і забезпечити властиві означення для невизначених тоді математичних понять (найпомітніші – асоційовані із неперервністю) привели до задовільних формулювань таких концепцій, як дійсне число і, остаточно, функції в теоретико-множинних термінах. Особливе значення у цьому відношенні мало теоретико-множинне визначення простору функцій, що уможливлює величезне розширення царства математичного аналізу.

3. Одночасна поява із теорією множин математичної логіки і в результаті продовження аксіоматичного методу на математику в цілому. *Адекватність* правил доведення в аксіоматичних теоріях є семантичним питанням, а семантичні рамки для таких теорій були сформульовані (Ґеделем, Тарським і ін.) у *теоретико-множинних термінах.* Концепція множини тепер розглядається необхідним складником *значення* аксіоматичного методу.

4. Нарешті, чудовий факт, що всі "об'єктивні" математичні поняття від натуральних чисел до ріманових многовидів і гільбертових просторів можна забезпечити теоретико-множинними означеннями, як множини із структурою (морфологія).

У цьому зв'язку Ґедель визнавав реалістичні погляди щодо множин і класів:

> "Класи і концепції можна уявляти як реальні об'єкти, а саме, класи – як "множинності речей" або як структури, що складаються із множинності речей, і концепції – як властивості і відношення речей, що існують незалежно від наших означень і побудов. Мені здається, що припущення таких об'єктів достатньо законне, як і припущення фізичних тіл, і є такі самі підстави вірити в їхнє існування. Вони у деякому розумінні необхідні, щоб одержати задовільну систему математики, як і фізичні тіла необхідні для задоволення наших чуттєвих сприйнять, і в обох випадках неможливо тлумачити твердження про ці сутності, як твердження про "дані", тобто в останньому випадку чуттєві сприйняття, що фактично з'являються." [У "Математичній логіці" (1944р.) Рассела.]
>
> "Цей негативний підхід [інтуїціоністів] до канторівської теорії множин і до класичної математики, якої вона є природним узагальненням, не є ні в якому випадку наслідком точного вивчення їх основ, а лише результатом певної філософської концепції природи математики, що допускає математичні об'єкті тільки до тої міри, до якої вони розтлумачуються, як наші власні побудови або принаймні можуть бути повністю дані у математичній інтуїції. Для когось, хто вважає, що математичні об'єкти існують незалежно від наших побудов і наявності інтуїції про них індивідульно, і вимагає лише, що загальні математичні концепції мусять бути достатньо ясними для нас, щоб могти розпізнати їх міцність і істинність аксіом стосовно них, я вважаю, існує задовільна основа для канторівської теорії множин в цілому її початковому задумі і значенні...
> "

Під "задовільною основою" Ґедель мав на увазі *ітеративну концепцію множини*, "згідно із якою множина – це щось, одержуване з цілих [або деяких інших правильно визначених об'єктів] повторним застосуванням [якщо необхідно, до трансфінітності] операції "множина (чогось)", а не щось, одержуване поділом цілісності існуючих речей на дві категорії..." Щодо первісної концепції "множина (чогось)" Ґедель сказав таке:

> " Операцію "множина x-ів" не можна визначити задовільно (принаймні не при нинішньому стані знання), а лише перефразувати іншими виразами, що знову містять концепцію множини, такими як: "сукупність x-ів",

> ″комбінація будь-якого числа x-ів″, ″частина цілісності x-ів″, де ″сукупність″ (″комбінація″, ″частина″) уявляється, як щось існуюче саме по собі, і не має значення, чи ми можемо визначити його скінченним числом слів (так що випадкові множини не виключаються) [це те, що Бернайс назвав ″комбінаторним″ поняттям множини].″

Наслідком реалізму Ґеделя щодо множин є те, що такі питання, як континуум-гіпотеза мусять бути *об'єктивно істинними або хибними*, навіть хоча наявна схема аксіом для теорії множин не дає змоги прийняти рішення про їх істинність чи хибність.

> ″ Тому що, якщо значення первісних термінів теорії множин ... прийняті як надійні, то з цього випливає, що теоретико-множинні концепції і теореми описують **деяку правильно детерміновану реальність**, у якій [континуум-гіпотеза] мусить бути істинною або хибною. Звідси її невирішуваність із аксіом, що припускаються сьогодні, **може означати лише, що ці аксіоми не містять повного опису цієї реальності**.″

Ґедель своїм переконанням щодо об'єктивності теорії множин і незалежного існування множин прийшов до формулювання ідеї, що нові аксіоми для теорії множин (аксіоми нескінченності) будуть досягнуті міркуваннями про концепцію множини. Ці нові аксіоми, як він сподівався, привели би до розв'язку континуум-проблеми і інших відомих задач теорії множин. Для Ґеделя і інших теоретико-множинних реалістів універсум множин являє собою Еверест, на який треба піднятися, подібно до справжнього Евересту, *тому що він там є.*

*

Розглянемо деякі протилежні погляди. Позиція Саундерса Маклейна щодо остаточної природи математики здається цілком розбіжною із Мейберрі, тобто

> ″Математика базується на людській діяльності і наукових задачах.″

Але він визнає, що теоретико-множинна основа для математики пропонує

> ″ту перевагу, що кожну концепцію можна зробити абсолютно ясною і явною.″

Все ж він скептичний стосовно остаточного ″існування″ множин:

> ″До того як наявні аксіоми, (кумулятивна) ієрархія є платоністським міфом, ясно видимим тільки тим, хто має шосте відчуття для множин.″

Але він заодно із Мейберрі у наполяганні на необхідності строгого доведення у математиці: як він каже, ″доведення є засобом одержання певності″. Можна запитати, однак, певності *чого*? Мейберрі як реаліст відповів би: ″певності *істини*″. Але Маклейн не підтримує реалізму і явно відкидає традиційне поняття математичної ″істини″, стверджуючи, що в дійсності математичні теореми не стверджують істин про світ. Його відповідь на наше питання з необхідністю була би складнішою. Фактично він заміняє ″істину″ формальним поняттям ″правильності″, тобто що доведення відбувається у строгій відповідності із узгодженими формальними правилами. Це видається формалістським рухом. І справді, Маклейн стверджує, що "математика займається не реальністю, а правилом", "математика не дає ніяких онтологічних зобов'язань", "філософія математики не потребує містити питання про епістемологію або онтологію". З іншого боку, форма математики "вибрана так, щоб відображати факти (про реальність)".

Щодо питання про основи математики Маклейн сказав:

> "Математика має доступ до абсолютної строгості, тому що вона про форму і про факт. Однак немає єдиної і абсолютної основи для математики. Будь-яка така фіксована основа перешкоджала би новизні, що могла би бути результатом відкриття нової форми. Формою є будь-який розвиток, що діє радше за правилом, ніж зверненням до факту, як до значення."

Щодо *теорії множин*, Маклейн бачить її як достатньо сильну, щоб забезпечити формулювання більшості математики, але це забезпечення часто штучне ... крім того, немає єдиного поняття "множини". Система першого порядку теорії Цермело-Френкеля служить відповідною формальною мовою для описування математичних об'єктів і міркувань про них, але оскільки вона неповна, то можливі інші "основи" такі як елементарні топоси.

*

Погляди Маклейна на природу математики несумісні із твердженнями таких науковців як Лакофф і Нуньєс. У книзі "Звідки походить математика: як втілений розум створює математику", що починається із спостереження, що єдиними математичними ідеями, які можуть мати людські істоти, є ідеї, які дозволяє людський розум, вони висувають твердження, що всі абстрактні ідеї, включно із математичними, виникають через *концептуальну метафору* – механізм для проектування втіленого (тобто чуттєво-моторного) міркування на абстрактне міркування. Коротко, Лакофф і Нуньєс стверджують, що математика є продуктом людських істот і сформована нашим розумом і концептуальними системами, а також справами людських суспільств і культури. Ми еволюціонували так, щоб наше пізнання підходило під світ, яким ми знаємо його. Їхні погляди на природу математики утворюють певний вид кредо натураліста:

> " Математика є природною частиною людини. Вона виникає із наших тіл, нашого розуму і нашого щоденного досвіду у світі. Культури мають всюди деяку форму математики. Немає нічого таємничого, містичного, магічного або трансцендентного у математиці. Вона є наслідком людської еволюційної історії, нейробіології, пізнавальних здібностей і культури. Математика є одним із найвеличніших результатів колективної людської уяви. Це – система людських концепцій, які надзвичайно використовують звичайні інструменти людського пізнання. Вона особлива тим, що є стабільною, точною, узагальнюваною, символізовною, обчислюваною, сумісною із кожним із її предметів вивчення, загальнокорисною та дієвою для точного осмислення великого числа аспектів світу, як ми відчуваємо його. Дієвість математики у світі є даниною

еволюції та культурі. Еволюція сформувала наша тіла і розум так, що ми успадкували нервові здібності для основ числа і для первісних просторових відношень. Культура зробила можливим для мільйонів проникливих спостерігачів природи через тисячі спроб і помилок розвинути і переходити до все більш і більш складних математичних інструментів – інструментів, сформованих для опису того, що вони спостерігали. Немає ніякої тамниці в дієвості математики для характеризації світу, як ми відчуваємо його: ця дієвість випливає із комбінації математичного знання і зв'язаності зі світом. Зв'язок між математичними ідеями і світом, як людина відчуває його, виникає в людському розумі. Це людина створила логарифмічні спіралі і фрактали і може "бачити" логарифмічні спіралі в равликах і фрактали в пальмових листках. *Коментар: той факт, що ми справді "бачимо" такі зразки у природі – насправді сама можливість робити це – є рисою реальності, схопленою людським розумом, але все таки об'єктивною. Опис зразка на поверхні равлика як логарифмічної спіралі є людською побудовою, але співвідношення між концепцією логарифмічної спіралі і фактичною конфігурацією на поверхні є об'єктивним. Число 2 є людським відкриттям, але співвідношення між концепцією "2" і полюсами магніта є об'єктивним.* В умах тих мільйонів, які розвивали і підтримували математику, концепції математики були виведені, щоб підходити до світу, як він усвідомлюється і осмислюється. Це можливо тому, що такі концепції, як зміна, пропорція, розмір, обертання, ймовірність, рекурентність, ітерація і багато інших є і щоденними і математизованими ідеями. Математизація звичайних людських ідей є звичайною людською справою. Розвитком писемних систем тисячоліттями культура уможливила позначувальні системи математики. Оскільки концептуальні системи здатні до концептуальної точності і символізації, математика здатна розвивати системи точного обчислення і доведення. Використанням метафор дискретизації все більше і більше математичних ідей стали точно символізовними і обчислюваними. Саме людська здатність до концептуальної метафори уможливлює точну математизацію і навіть арифметизацію щоденних концепцій – таких як колекції, виміри, симетрія, випадкова залежність і незалежність, і багато іншого. Все у математиці доступне розумінню – принаймні в принципі. Оскільки вона використовує загальні людські концептуальні здібності, її концептуальну структуру можна проаналізувати і навчити у зрозумілих термінах. Математика творча і відкрито-замкнена. Завдяки використанню концептуальних метафор і концептуальних сумішей нинішню математику можна продовжувати для створення нових форм, імпортуючи структуру з одної області до іншої і сплавляючи ідеї з різних областей. Людські концептуальні системи не монолітні. Вони допускають альтернативні бачення концепцій і численні метафоричні перспективи(види) багатьох (але ні в якому випадку не всіх!) важливих аспектів наших життів. Математика так само концептуально багата, як і будь-яка інша частина людської концептуальної системи. Крім цього, математика допускає альтернативні картини і версії концепцій. Немає одного поняття нескінченності, а багато, не одна формальна логіка, а десятки тисяч, не одна концепція числа, а багата різноманітність альтернатив, не одна теорія множин або геометрія або статистика, а широкий їх діапазон – вся математика! Математика є чудовим прикладом краси, багатства, складності, різноманітності і важливості людських ідей. Це вражаючий заповіт тому, на що здатний звичайний втілений людський розум, коли він помножений творчими зусиллями мільйонів протягом тисячоліть. Портрет математики має людське обличчя."

*

Чандлер Девіс виклав деякі погляди на математику з точки зору матеріаліста. Згідно з ними суперечливо бути одночасно математиком і матеріалістом (всупереч його власному подвійному статусу), тому що перший стверджує справджуваність певних тверджень про абстрактні математичні об'єкти, які є витворами людського розуму, в той час як заперечує, що мисленні побудови мають існування, незалежне від людської реальності. Як математик, він розглядає математичну діяльність як первісну і, ймовірно, остаточно зосереджену на *абстрактних об'єктах*: оскільки ці об'єкти, очевидно, не мають фізичного існування, матеріаліст був би зобов'язаний відкинути їх, як химеричні. У такому випадку про що математик має певне знання?

Девіс вказує, що на противагу тому, що рекомендує матеріаліст, математик шукає теорію, не прив'язуючи її до практики. Тобто "математика є кабінетною наукою". Але це можна захистити і, насправді, неминуче, тому що, оскільки математика "робить можливими довгі ланцюжки міркувань, вона має тенденцію до видовжування проміжків, з якими теоретик, навіть якщо він бажає звертатися до практики, знаходитимиме природним робити так." З іншого боку, як правильно вказує Девіс, "заперечуючи авторитет есперименту, математика ризикуватиме більше, ніж інші науки, втечею від реальності."

Як матеріаліст, Девіс розглядає онтологічний статус математичних сутностей як головну проблему. Він зауважує, що математичні об'єкти представлені синтаксично іменниками і продовжує порівняння між способами, якими іменники використовуються у звичайній мові і в математиці. Оскільки деякі іменники не є назвами об'єктів, він обмежує увагу до "тих іменників у загальній мові, які використовуються, як існуючі або принаймні як гіпотетичні об'єкти." Девіс заявляє, що "математичний об'єкт – це будь-що, про що можна корисно говорити *однаковим способом* – логічно, а також синтаксично – у математичному міркуванні," і що "математичне існування – це корисність в ролі імені існуючого об'єкта у математичному міркуванні."

Треба зауважити, що це означення не видається дуже корисним, тому що воно просто заміняє термін "існує" фразою "називання існуючого об'єкта". Девіс зробив ненабагато більше, ніж ототожнити правильно синтаксичну категорію, у якій приписувати імена математичних об'єктів; проблема, які з цих імен мають дійсні значення, не розв'язана. Девіс вказує, що проблема існування в математиці постає серйозно тільки коли працюють із теоріями, які не мають скінченних моделей. (Це, ймовірно, так, тому що скінченні моделі "фізично реалізовні" і тому терміни в теоріях, що володіють скінченними моделями силою самого факту задовольняють умову бути "іменами існуючих об'єктів".) Крім цього, у теоріях, що володіють скінченними моделями, можна виснувати доведення існування бажаного ступеня визначеності, міркуючи про те, що би сталося, якби ми проводили вичерпний пошук через елементи моделі. "Міркування того самого сорту," каже Девіс, "яке застосоване до випадків, де пошук немислимий, необґрунтоване." (Звичайно, це конструктивістська позиція.)

Треба , однак, вказати, що багато (інфінітарної) математики *не про* процедури нескінченного пошуку. Наприклад, доведення існування невимірної за Лебегом множини приймає *як задану* аксіому вибору: як тільки вона прийнята, доведення не має нічого спільного із "нескінченними пошуками". Загалом твердження існування про нескінченні структури нічого не говорять про можливість фактичного виконання пошуку і не розраховані на це.

Девіс піднімає питання щодо того, чому математики схилилися до ігнорування питань основ і, зокрема, чому математики (на його думку) просто прив'язалися до платонізму, незважаючи на його очевидну абсурдність. Він подає дві головні причини: визнання руйнівної природи інтуїціоністської критики і непотрібність основоположних питань для щоденної практики математиків. Подібно до Еррета Бішопа, Девіс вважає, що "класичну" математику, наприклад, числення лишків Коші, було би найкраще звільнити від "зайвого багажу", подібного до дедекіндової побудови дійсних чисел, теореми Гейне-Бореля та ін. Але на відміну від конструктивістів Девіс не вказує, що повинно замінити їх.

Девіс стверджує, що (певна) математика формулює твердження про об'єктивну реальність. Він засуджує містифікацію математики і її підняття до певного виду релігійного культу. Він схвально цитує Енгельса:

> "Чиста математика має своїми об'єктами просторові форми і кількісні співвідношення дійсного світу."

І так само схвально цитує Дірка Струйка:

> "внутрішня істина [математичних тверджень] випливає із того факту, що вони представляють об'єктивні відношення у матеріальному світі, які досліджуються стосовно їх власної логіки, їх власного розвитку і їх внутрішніх співвідношень."
>
> Однак на відміну від Девіса, який розглядає математичні твердження головним чином як про об'єкти, Енгельс і Струйк, здається, кажуть, що ці твердження стосуються форм і відношень, що *не є тим самим*, що й об'єкти. (Д.Белл думав, що могло би бути можливо виправдати трансфінітну математику в термінах можливих відношень серед матеріальних об'єктів, хоча ці відношення фізично навіть не існують, але відмовився від цієї позиції.)
>
> Девіс висуває критерій "хорошої" математики: "Хороша частина математики потенційно корисна у здійсненні фактичних тверджень про об'єктивний світ." (Смішно, що точно таке саме визначення за Г.Харді частини "поганої" математики.) Девіс визнає, що цей критерій важко застосовувати, але просить, щоб він працював *преференційно* – таким способом, щоб "віддавати перевагу одній частині математики перед іншою."

Белл знаходить цей реалістичний підхід до математики по суті привабливим, але думає, що погляд Девіса щодо того, що утворює об'єктивну реальність, є занадто вузьким. На його погляд "дійсний" світ містить не тільки *об'єкти* у розумінні, в якому Девіс використовує цей термін, але також *відношення і властивості*. Щоправда, останнє менш безпосереднє, ніж матеріальні об'єкти або розпізнавані частинки, але, можливо, не менш дійсне – принаймні для нас. Міра, до якої відношення і властивості можна *уявляти як щось матеріальне*, тобто тлумачити так, нібито вони *є об'єктами*, є центральною проблемою в основах математики, якій Девіс приділяє недостатню увагу.

Девіс умовляє всіх відкинути те, що він називає "платоністським абсурдом" і наполягає, що "доводи, які трактують нескінченні множини розрізнюваних об'єктів, як справжні і маніпульовні, не несуть впевненості..." З іншого боку, він відкидає те, що називає "доктриною Кронекера-Брауера-Бішопа, що створені руками людей теорії можуть зійти на небеса тільки довівши їхнє божественне походження від цілих." Він приймає математичний *континуум*, але відкидає "множину всіх підмножин незліченної нескінченної множини" на тій підставі, що її майже напевно ніколи не можна буде використати у "хорошій" частині математики. Він думає, що такі "чудовища" виникають як наслідок виконання розумових маніпуляцій сортування і підрахунку множин, де вони невідповідні.

Однак треба зазначити, що цей критицизм втрачає силу, коли підмножини розглядаються як *властивості*. Крім того, оскільки теорія множин має зліченні моделі, цілком можливо, що абстрактні властивості, включені в теорію множин, мають більш конкретне втілення. А це саме так, якщо є (зліченно) нескінченно багато об'єктів у фізичному всесвіті, як припускається, наприклад, у ньютонівській космології.

Позиція Белла щодо матеріалізму Девіса така. Він рішуче підтримує погляд, що математика (або принаймні хороша математика) говорить щось про об'єктивну реальність. Але "сирість" девісового матеріалізму приводить його до прийняття занадто вузького погляду на те, що утворює об'єктивний світ, і звідси, що утворює хорошу математику. Він має рацію, критикуючи платоністську матеріалізацію як безглузду, якщо сприймати її буквально. З іншого боку він, здається, дозволяє матеріалізацію концепцій, коли вони здатні бути корисними в описі дійсного світу. Але він не подає ніякого пояснення цього.

*

М.Маховер задіяв ідею матеріалізації у підході до основ математики. Він каже:

> "Математична діяльність є соціальною; але вона соціальна лише у певному специфічному розумінні. Вона не є видом соціальної гри, у якій всі гравці фактично присутні в той самий час і в одному місці і займаються буквально спільною громадською діяльністю. Для будь-якого математика більшість математики, через яку він проходить, має місце спершу не в його власному розумі і навіть не в його власній присутності, а так, нібито це відбувалося за його спиною, і пізніше – деколи значно пізніше – подано йому як *зроблена справа* через різні канали обміну. Хоча математика в основі є (або починає із) конструктивною діяльностю, вона не є загалом діяльністю, у якій я беру участь безпосередньо. У більшо-

сті випадків я стикаюся з кінцевим продуктом, який тому має тенденцію припускати личину чогось об'єктивного, майже як об'єкт природи. Спроба матеріалізації майже нездоланна. Звичайно, спроба – не те саме, що підтвердження. Чи можна дати підтвердження? Я вважаю, що можна. Я не претендую на знання *всіх* можливих підтверджень, але вірю, що може бути більше ніж одне, і на різних рівнях. Ось один із способів, як це можна зробити. Почнемо із певного типу схематичної побудови. (Я сильно вірю, що *вся* математика *розпочинає* із побудови, починає як схематична побудовна діяльність.) На цьому етапі кожна пропозиція є твердженням, що стверджує здійсненність такої-то побудови. Доведення такої пропозиції полягає у показі того, *як* виконати побудову того сорту, який побудова стверджує здійсненним, і показі, що описана побудова справді є потрібного сорту. Ці пропозиції стають принаймні частково формалізованими. (*Вся* математика стає принаймні частково формалізованою тільки у фрагменті природної мови. Це видається одним із правил гри; можливо, вона має справу із схематичною природою побудов.)

Той факт, що ми все ще на конструктивному етапі, означає, що логіка, яка керує нашим дискурсом, є конструктивною (інтуїціоністською) логікою. Хоча наша математика вже формалізована – частково або навіть повністю – вона *не* беззмістовна. Навпаки, формалізація є просто інструментом точності. Постулати, які ми використовуємо, ні в якому випадку не є довільними стрічками символів, ні неявними означеннями гіпотетичних сутностей. Вони є постулатами у старому традиційному розумінні: самоочевидні істини про побудови, із якими ми маємо справу. Сумісність ґарантована *за умови*, що нам вдалося схопити правильно в нашій інтуїції певні основні факти про ці побудови. Звичайно, ми загалом не можемо бути певними у цьому, але досвід і уважне міркування можуть виправити помилки, якщо такі є. Доведення сумісності – до тієї міри, що ми можемо його дістати – на цьому етапі непотрібне, щоб переконати нас в сумісності (справді, ми знаємо, що таке доведення може загалом бути менш переконливим, ніж пряме спостереження, що ґрунтується на конструктивному розумінні постулатів), але може бути дуже прояснюючим і інформативним. Наприклад, ґеделеве доведення сумісності для гейтінґової арифметики (доведення "Діалектика") показує, що є альтернативна інтерпретація цієї теорії в термінах *примітивно-рекурсивних* функціоналів скінченного порядку (радше ніж довільних конструктивних функціоналів).

Тепер наступний етап. Є низка "вірних перекладів" із класичної на інтуїціоністську логіку таких, що якщо Φ – множина формул і Φ^* – їхні переклади, то Φ сумісна у класичній логіці, якщо і тільки якщо Φ^* сумісна в інтуїціоністській логіці. Якщо члени Φ^* виявляються теоремами нашої конструктивної теорії, то Φ класично сумісна, і можна взяти Φ як множину постулатів для класичної теорії, у якій використовуємо закон виключеного третього, розглядаємо твердження еквівалентним до його подвійного заперечення, ототожнюємо $\exists x$ із $\neg\forall x\neg$ і т.ін. Це означає, що можна безпечно тлумачити наші змінні як такі, що пробігають повну цілісність об'єктів – тобто можемо матеріалізувати. Тому що, *говорячи технічно, матеріалізація зводиться ні до чого іншого, як до використання класичної логіки*. Онтологія, яка супроводжує це, не є технічно необхідна, але достатньо безпечна (оскільки ми морально певні, що використання класичної логіки тут безпечне) і на практиці є дуже корисним якорем для нашої інтуїції.

Ці покладені в основу об'єкти можуть мати сімейну подібність або сімейний зв'язок із побудовами, з яких ми розпочали, а можуть і не мати. Поверхнево ця програма, здається, нагадує формалізм, просто замінюючи фінітарну метаматематику конструктивістською метатеорією. Але є дві життєво важливі різниці. По-перше, тут класична (платоністська) математика більше не є беззмістовною, а інтерпретовною у конструктивних термінах. По-друге, ця програма не вражається ґеделевою другою теоремою про неповноту. Тому що ця теорема, звичайно, не заважає доведенню (навіть скінченному) сумісності класичної теорії *щодо* конструктивної теорії. І наша віра в (абсолютну) сумісність останньої не висить на скінченному доведенні сумісності.

Очевидним прикладом такої процедури є одержання арифметики Пеано із арифметики Ґейтінґа. Справжінм тріумфом було би одержати подібним способом одну із звичайних класичних теорій множин із достатньо переконливої конструктивної теорії, що має справу із підходячою сім'єю побудов, які можуть мати або можуть і не мати деяку інтуїтивну подібність до множин. Деякий прогрес у цьому напрямі вже зроблений.

Говорячи більш абстрактно, я би хотів запропонувати, що цей процес, можливо, може бути ітерований. Розпочинаючи із вже матеріалізованої онтології, можна розглядати процедури, які конструктивні *щодо об'єктів тої онтології* (наприклад, так звані рекурсивні операції на множинах, які самі можуть бути неконструктивними). Потім можна намагатися матеріалізувти ці побудови.

Можуть бути інші надійні способи, якими матеріалізацію у математиці можна обґрунтувати. Як багато класичної математики можна відновити таким способом - це питання, на яке не можна відповісти наперед. Але моє власне відчуття, що будь-яка порція класичної математики, яка цілковито опирається такому зведенню, можливо, не варта утримання.'

*

Крейзель і Крівін висувають погляд, що "Вивчення основ пов'язане із описом і аналізом так званої 'інтуїтивної' або 'неформальної' математики, тобто математики, як вона розуміється звичайними працюючими математиками." Цей квазісоціологічний погляд підтримується твердженням, що описова частина предмета включає переформулювання неформальної математики на *формальну мову*, наприклад (але не необхідно) теорію множин.

> "Вивчення основ властиво пов'язане із питаннями, що можуть вимагати розгляду, достатньо відмінного за характером від звичайної математики. Зокрема, в основах ми намагаємося знайти теоретичні рамки, що дають змогу сформулювати хороші причини *для* основних принципів, прийнятих у математичній практиці, натомість сама математика пов'язана лише із висновуванням *із* цих принципів."

Згідно з цим,

" методи, використовувані в основах, необхідно виходять поза методи математичної практики: відкриття нових концепцій і потрібних методів може включати відчутно філософські міркування, і, зокрема, чиюсь концепцію природи математики. Якщо (1) дотримуються погляду, що інтуїтивна математика суттєво пов'язана із певними (абстрактними) об'єктами, приходять до "реалістичної" теорії цих основних об'єктів: у такій системі основ значення інтуїтивних тверджень аналізується в термінах цієї теорії і правила міркувань виведені із законів, яким підпорядковуються ці основні об'єкти. Отож, реалістичні основи аналогічні до теоретичної фізики, що пояснює звичайні фізичні явища в термінах фундаментальних складників фізичного світу (елементарні частинки у поточній теорії). Але якщо (2) дотримуються погляду, що суть інтуїтивної математики полягає у доведенні або, точніше, різних видах доведення, приходять до "ідеалістичної системи основ, що посилаються на саму математичну діяльність." [Крейзель також зазначив, що класична і конструктивістська математики використовують підходячі методи, щоб описувати різні частини того самого світу (відповідно математичні об'єкти і математичне доведення).]

Як приклад (1) вони згадують *теоретико-множинні семантичні основи* і як приклад (2) – *комбінаторні синтаксичні основи.* (Іншим прикладом "ідеалістичних" основ, не у витоках явно пов'язаним із доведенням, є *брауерівський інтуїціонізм.* Ще одним, підтриманим зокрема Г.Вейлем, є *гуссерлівська феноменологія.*)

Що стосується теоретико-множинних основ, Крейзель і Крівін вказують, що концепція множини початково містила певні двозначності, які мали бути уладнані до того, як вона стане прийнятною як основоположний інструмент.

> " Поняття множини запроваджене як сира суміш, що містить принаймні 3 різні елементи. Множини розглядалися:
>
> 1. як прості аналоги скінченних колекцій (поняття, яке, як припускалося, було зрозумілим), що задовольняє більш-менш ті самі закони [це концепція множини, підтримувана Мейберрі];
>
> 2. як довільні колекції *заданої* колекції; це зустрічається повсюдно у математиці (множини цілих або множини точок; колекція цілих і колекція точок (дісні числа) приймаються правильно визначеними);
>
> 3. як абстракція із загальнішого поняття *властивості*, множина є колекцією об'єктів, які мають задану властивість. (Оскільки властивості, визначені різними способами, можуть задовольнятися тими самими об'єктами, поняття множини тут розуміють, як інваріант властивостей [тобто властивості, тлумаченої в обсягу]). У самій математиці мало використовують властивості, для яких ми не маємо ніякої *апріорної* межі

на сорт об'єктів, які задовольняють їх [ось чому канторівська теорія множин обмежує увагу до *обмежених* колекцій]: але і в логіці, і у щоденному житті такі властивості широко використовуються. Прикладом є властивість бути непорожнім (яка, між іншим, застосовується до себе самої); або властивість бути синім; бо навіть якби вона мала межу, ми використовуємо цю властивість без будь-якої ясної ідеї класу синіх речей (минулих, теперішніх чи майбутніх)."

Кричущі помилки (суперечності) рідкісні у математичних використаннях поняття множини тому, що у будь-якому конкретному виведенні одне із цих понять мовчки мається на увазі. Після відкриття парадоксу Рассела сам Рассел і Цермело сформулювали те, що K&K називають *точним поняттям множини*, тобто *теоретико-типове поняття*. Версією Цермело цього є *структура кумулятивного типу* (скт). Вона визначається так. Розпочинаємо із деякої (можливо порожньої) колекції C_0 індивідів, тобто об'єктів, які не мають ніяких членів. Потім для будь-якого ординала $\alpha > 0$ $\quad C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta \cup PC_\beta$, об'єднання для всіх $\beta < \alpha$ множин C_β і всіх їхніх частин. Крім основних логічних операцій на множинах, тепер присутня додаткова операція P і її ітерація до трансфінітного α. [Можна запитати, чи ці дві процедури справді "точні".] Із-за неабсолютності операції степеневої множини ми можемо вимагати тільки, щоб вона була у деякому розумінні рівномірною над цілою ієрархією, тобто щоб значення виразу "всі частини x" було незалежним від x. У випадку ітерації ідея індукції мусить якось бути продовжена до трансфінітного. Якщо все це задано, теоретико-множинні аксіоми тоді очевидно істинні для структури кумулятивного типу. Математичні об'єкти можна ототожнити як множини у цій структурі, а їхні властивості встановлюються виведенням із аксіом.]

У комбінаторних або "формалістських" основах об'єкти, із якими мають справу, є скінченними комбінаціями конкретних об'єктів таких як алфавіт, цифри, символи формальної мови і т.ін. Комбінаторна функція є механічним правилом разом із комбінаторним доведенням функціональності: правило застосовується радше до опису об'єкта, ніж до самого об'єкта. Щоб доведення було комбінаторним, воно мусить містити скінченне число комбінаторних функцій і послідовність основних об'єктів. У комбінаторних основах вивчається міркування про математичні об'єкти, а не самі об'єкти. Істина математичних тверджень замінюється довідністю, а адекватність схеми – сумісністю. Це суть *програми Гільберта*.

Різницю між теоретико-множинними і комбінаторними основами K&K підсумовують так:

"Обидві забезпечують відповідь на питання: що таке математика? Теорія множин формулює частковий "реалістичний" погляд, а потім зосереджується на об'єктах, а не на міркуваннях про них; її відповідь – що математика є теорією множин із відповідно точним поняттям множини. Комбінаторіалізм формулює частковий "ідеалістичний" погляд, розглядає абстрактні математичні об'єкти як фігури мови, і хоче показати, що наш спосіб використання цих фігур мови зв'язний. Що особливого у цьому погляді – це те, що наше математичне міркування є по суті комбінаторним, що цінність наших висновків, яку взагалі можна комбінаторно сформулювати, також можна встановити комбінаторіальними методами. Цей погляд, якщо правильний, не лише стверджує *єдність* математичних міркувань, але й є одного дуже чудового сорту: оскільки шкільна математика є типовою для комбінаторної математики, вона представляє цілу математику як таку, що є того самого сорту, що й шкільна!"

Крейзель зазначив про реалізм і теорію множин:

"У теорії множин наголос не на процесі міркування, а на результатах і, зокрема, на об'єктах, про які робляться твердження. Як наслідок, якщо формалізація використовується як описова схема для міркування, виправдання правил полягає в показі того, що висновки *цінні*. В той час, як самі правила не проблематичні, у простодушних міркуваннях про множини вони були і приводили до суперечностей. Ближче вивчення тих об"єктів, якими є множини (скт), пояснює обмеження на правила. Як теорія, теорія множин приваблива тому, що вона має декілька первісних, а інші математичні об'єкти вибудовуються природно: якщо би було досягненням вибудувати фізичний світ із 100-дивних атомів, то наскільки більш вражаючим було би вибудувати світ математики із двох первісних. Крім того, закони для цих первісних елегантні і на диво зрозумілі. [Зауваження Белла: це можна порівняти із "досягненням" побудови англійської мови із алфавіту з 26 букв або західної музики із нот хроматичної гами.]

Загальніше, реалістична концепція, без сумніву, дуже близька до способу, яким значна частина математики представляє сама себе нам, і пояснює об'єктивність математики, тобто угоду про результати, і цим є про зовнішні об'єкти, з якими ми знаходимося у певного роду контакті. Як вказував Ґедель, є значна подібність методів набування знання в елементарній математиці і в фізиці. Також можна погодитися, що реалістичне припущення зовнішніх математичних об'єктів є не більш *сумнівне*, ніж фізичних об'єктів.

Слабкість реалістичної концепції лежить десь інакше... Я не знаю формулювання реалістичного погляду, для якого досвід встановлює існування нескінченних множин, не говорячи вже про недосяжні. Стосовно зв'язку із фізичними об'єктами, це, звичайно, незвично у фізиці розглядати існування об'єктів як встановлене, тому що ми можемо думати про них."[Зауваження Белла: це видається більш характеристичним радше для *концептуалізму*, ніж для реалізму.]

І про інтуїціоністську і ідеалістичну концепції математики:

"У фінітістському формулюванні побудови застосовуються тільки до конкретних, тобто просторово-часових конфігурацій, в інтуїціоністському також до абстрактних об'єктів таких як функції і функціонали і, зокрема, логічні операції на так званих нерозв'язних властивостях і доведеннях. Інтуїціонізм є дуже вузькою версією ідеалістичної концепції математики, мало відрізняється від соліпсизму у загальній ідеалістичній філософії... Як треба очікувати від соліпситської традиції, критицизми конкуруючих позицій є екстравагантні і непереконливі – і можливо спрямовані, щоб прикрити справжні труднощі у формулюванні соліпсистської позиції зв'язно. Але треба зауважити, що ця позиція достатньо правдоподібна і, принаймні як перше наближення, коли цікавляться питаннями *очевидності* (або в іншому питанні ясності). Соліпсистська позиція наголошує *особливу* очевидність тих ідей, які самі є про інші ідеї, або, більш частково, про розумові акти, а не про зовнішні об'єкти. Ідеалістична концепція, ймовірно, є найбільш загальним місцем у даний час: математитка є вільною розумовою діяльністю. [Белл сумнівається, що цей погляд є найбільш загальним місцем серед математиків. У будь-якому випадку, як розумова діяльність навряд чи може бути цілковито "вільною", подібно до діатонічної музики, вона дуже обмежена правилами.] Як така, вона не виключає існування математичних об'єктів, зовнішніх до нас; вони би мали ту саму структуру, що й включені ідеї, і тому математика була би про них також. Без сумніву, на елементарному рівні не запитують себе, чи, наприклад, прості арифметичні твердження є про конкретні реалізації (скінченні множини речей), чиюсь ідею про такі конфігурації, чи про деякі абстрактні сутності. Далі, навіть якщо допускаються абстрактні об'єкти, зовнішні до нас, *на певному етапі* було би достатньо відповідно із науковою практикою ігнорувати їх, якщо наявна інформація сумнівна і збиває з пантелику. Це робиться також реалістом, який, певно, (властиво) ігнорує питання про організацію мозку, не заперечуючи, що це можна включати у точніше вивчення цих зовнішніх об'єктів. *Слабкість* загальної ідеалістичної позиції радше та, що вона недостатньо гостра. Зокрема, я не знаю ніякого формулювання, що виключає прийняття цілої формальної теорії множин, як законів наших *ідей* колекцій, що існують незалежно від нас. Це вказує на можливість *основ* теорії множин у термінах *загальніших* понять. Загалом первісні концепції ідеалістичної концепції не входили би безпосередньо в математичну практику, але були би використані як аналіз, тобто для основ."

§5. Варіація і логіка

В основі еволюції математики і філософії лежала спроба примирити низку поєднаних протилежностей: одне і багато, скінченне і нескінченне, визначене і випадкове, дискретне і неперервне, постійне і змінне.

Традиційно припускалося, що єдина аркова система міркувань, що керується класичною логікою, застосовна *нарівні і одночасно* до всіх цих протилежностей. Але чи справді достатньо єдиної логіки? Світ, як ми усвідомлюємо його, знаходиться у вічному стані потоку. Але об'єкти математики звичайно вважаються вічними і незмінними. Як тоді явищу зміни надати математичного виразу? Розглянемо, наприклад, фундаментальну і знайому форму варіації (зміни): *зміна розташування* або *рух* – форма варіації така базисна, що механістичні матеріалістичні філософи 18-го і 19-го століть вважали, що вона охоплює всі форми фізичної варіації. Тепер сам рух звідний до ще більш фундаментальної форми варіації – *часової* варіації. (Згідно із Уайтхедом навіть це не є остаточним зведенням.) Але це зведення можна здійснити лише тоді, коли усвідомлена ідея *функціональної залежності* просторових розташувань від часових моментів. За браку адекватного формулювання цієї ідеї математики грецької античності не змогли подати задовільний аналіз руху або більш загальні форми варіації, хоча вони намагалися потужно боротися з проблемою. (Треба зазначити, що проблема аналізу руху показана парадоксами Зенона, які призначалися для показу неможливості руху і що фактично світ є парменідівською незмінною єдністю.)

До 17-го століття рух не вважався функціональною залежністю між простором і часом як прояв залежності змінного просторового розташування від змінного часу. Це дало змогу звести різноманітні форми просторової варіації до одного простого фундаментального поняття часової зміни, а концепцію руху ототожнити із *просторовим представленням* часової зміни. ("Статична" версія цієї ідеї така, що просторові криві є "просторовими представленнями" прямих ліній.)

Цей опис руху (і його центральної ідеї – функціональної залежності) жодним чином не змушує уявляти простір і час розкладними далі на неподільні атоми або *точки*. Все, що потрібно, - це присутність двох областей варіації – у цьому випадку простору і часу – співвіднесених функціональним відношенням. Правда, щоб *встановити* взаємозв'язок, потрібно бути здатним *локалізувати* в областях варіації, (наприклад, тіло у місці x_i в час t_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$) і щоб можна було вважати, що ці області варіації є просто "ансамблями" всіх таких можливих "локалізацій".

Але навіть це не вимагає, щоб самі локалізації були атомними точками – порівняйте із методом Уайтхеда "широкої абстракції" і, в наші дні, виникнення "безточкової топології".

Включення варіації в математику у 17-у столітті привело, як добре відомо, до тріумфів числення, математичної фізики і математизації природи. Але виникли труднощі у спробах визначити миттєвий темп зміни змінної кількості – фундаментальну концепцію диференціального числення. Подібно до античних піфагорейців зусилля звести неперервне до дискретного, спроба математиків 17-го століттязвести змінне до статичного використанням нескінченно малих привели до прямих *суперечностей*.

Маркс і Енгельс думали, що аналіз об'єктивної варіації вимагатиме створення діалектичної логіки або "логіки суперечності". Але те, що фактично з'явилося (у 19-у столітті), - це ефективна заміна варіації актуальною нескінченністю в руках Дедекінда, Кантора та інших. Зокрема, Кантор замінив концепцію змінної кількості концепцією завершеної, статичної *області варіації*, яку саму можна розглядати як ансамбль атомних індивідів – отож, подібно до піфагорейців, замінюючи в той самий час неперервне дискретним. Він також виганяє нескінченно малі і ідею геометричних об'єктів, як породжених точками або прямими в русі.

Проте деякі математики висунули заперечення ідеї "дискретизації" або "арифметизації" лінійного континуума. Наприклад, Пірс відкинув ідею, що справжній континуум можна розкласти в колекцію дискретних точок, не має значення як багато їх могло би бути. Це нагадування суперечки між атомістами і стоїками з, по суті, того самого питання приблизно у 400р. до н.е. Лише з Брауером на початку 20-го століття логіка справді включилася у суперечку. Відкидаючи канторівський опис континууму, як дискретного, Брауер ототожнює точки на прямій із сутностями "у процесі ставання" в суб'єктивному розумінні, тобто із втілюючими певний сорт варіацій. Він відкинув закон виключеного третього для таких об'єктів – рух, що приводить до нової форми логіки – *інтуїціоністської логіки*.

Чудовий факт, що інтуїціоністска логіка Брауера сумісна із дуже загальною концепцією варіації, яка охоплює всі форми (об'єктивної) неперервної варіації, і яка, зокрема, дозволяє використовувати (неперервні) нескінченно малі. В той час, як її корені лежать в суб'єктивному, так інтуїціоністська логіка відкрила, що має *об'єктивний* характер. Застосування інтуїціоністської логіки, щоб розв'язати суперечність, викликану варіацією, показує, що в кінці кінців не було необхідно, як стверджувала "діалектична" філософія, відкидати *закон несуперечності* $\neg(A \vee \neg A)$, а радше дуальний до нього *закон виключеного третього* $A \vee \neg A$.

Характеристикою інтуїціонізму є те, що, як тільки властивість математичного об'єкта була встановлена засобами побудови, ця властивість залишається встановленою на всі часи; словом, вона *непорушна*. Це відображено у *властивості постійності* семантики інтуїціоністської логіки: що твердження, як тільки його вимусили бути істинним, залишається істинним. Це вказує на те, що інтуїціоністську логіку можна грубо розглядати як логіку *минулого часу*: твердження виду "таке і таке було", як тільки істинне, залишатиметься істинним завжди (за умови, звичайно, що всесвіт не містить ніяких замкнених часовоподібних ліній). Це є частковий випадок асоціації серед типів варіації, філософського підходу і логіки, як вказано у наступній відповідності:

Тип варіації	**Філософський підхід**	**Логіка**
Статична: ніякої варіації: вічний теперішній час: об'єктивний стан справ, незалежний від нашого знання	Платоністський реалізм	Класична
Кумулятивна: ніякого перегляду інформації на пізніших етапах: як тільки відомо, завжди відомо	Широкий конструктивізм Кантівський ідеалізм	Інтуїціоністська
Некумулятивна: можливий перегляд, фальсифікація або втрата інформації на пізніших етапах	Індетермінізм Юмівський скептицизм	"Квантова"

Насправді певні загальні типи варіації можна пов'язати із певними концепціями і областями математики:

Тип варіації	**Математичний корелят**
Часова	Натуральні числа (дискретне) Дійсна пряма (неперервне)
Позиційна (рух)	Дійсна пряма Диференціальне числення Математичний аналіз
Морфологічна	Топологія Теорія категорій

Морфологічна варіація – зміна форми – є, говорячи широко, предметом теорії категорій, яку ми розглянемо, як можливу основу для математики.

Теорія категорій забезпечує загальний апарат для того, щоб мати справу із математичними структурами і їхніми взаємними зв'язками і перетвореннями. Придумана Ейленбергом і Маклейном у 1940-х дисципліна зародилася як галузь алгебри (гомологічна алгебра) за допомогою топології, але швидко вийшла за межі витоків. Можна сказати, що теорія категорій має таке саме відношення до абстрактної алгебри, як остання до елементарної алгебри. Тому що елементарна алгебра виникає в результаті заміни постійних кількостей (тобто чисел) змінними, залишаючи операції на цих кількостях незмінними. Абстрактна алгебра у свою чергу переносить це на етап далі, дозволяючи операціям змінюватися, натомість наполягаючи все ж, щоб охоплюючі математичні структури зберігали певну приписану форму (групи, кільця і т.ін.) Нарешті, теорія категорій дозволяє змінюватися навіть структурам, даючи початок далекосяжному описові математичної форми. Виникнення теорії категорій згідно з цим можна вважати прикладом діалектичного процесу заміни постійного змінним.

Категорії можна розглядати як рамки для аналізу варіації. Отож, ми припустимо, що задані

• *області варіації або типи* $A, B, C, \ldots$

• *перетворення або співвідношення (кореляції)* $f : A \to B$ *або* $A \xrightarrow{f} B$ *між такими областями:* A *і* B *називаються корельованими* f*;* A *є областю (або областю визначення),* B *– кообластю (або образом)* f.

Як конкретні приклади можемо розглянути:

Простір → Час	Аналогові годинники
Натуральні числа → Час	Цифрові годинники
Час → Простір	Рухи
Простір → Раціональні/ Дійсні числа	Термометри, барометри, спідометри

Про співвідношення $A \to B$ можна думати як про B-значну кількість, що змінюється на A. Як такі, співвідношення можна складати:

$$\frac{A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C}{A \xrightarrow{g \circ f} C}.$$

Наприклад, використання цифрового секундоміра з зупинкою зводиться до складеного співвідношення

Натуральні числа → Час → Простір.

Композиція співвідношень асоціативна в очевидному сенсі. Із кожною областю A асоційовано тотожне співвідношення $A \xrightarrow{1_A} A$, що задовольняє $f \circ 1_A = f$, $g \circ 1_A = g$ для будь-яких $A \xrightarrow{f} B$, $C \xrightarrow{g} A$.

Це базисні початкові дані категорії.

Із філософської точки зору категорію можна розглядати як явне представлення математичної форми або концепції. Об'єкти категорії C є прикладами асоційованої форми, а морфізми або стрілки C – перетвореннями між цими прикладами, які у деякому точному розумінні зберігають цю форму. Як приклади маємо:

Категорія	Форма	Перетворення
Множини (Множина)	Чиста дискретність	Функціональні співвідношення
Множини з відношеннями	....	Співвідношення один-багато
Групи	Композиція / інверсія	Гомоморфізми
Топологічні простори	Неперервність	Неперервні відображення
Диференційовні многовиди	Гладкість	Гладкі відображення

Позаяк практика математики минулого сторіччя офіційно ґрунтувалася на теорії множин, об'єкти категорії типово будуються як *множини* певного сорту, синтезовані, так сказати, із чистої дискретності. Як множини, ці об'єкти проявляють теоретико-множинні співвідношення – членство, включення і т.ін. Проте ці взаємовідносини зайві – і в багатьох випадках *невиявлювані* – коли об'єкти розглядають як втілення форми, тобто коли розглядаються через лінзи теорії категорій. (Наприклад, у категорій груп адитивна група парних цілих ізоморфна до (тобто не відрізняється від) адитивної групи всіх цілих чисел.) Цей факт складає одну з філософських причин, чому певні категорні теоретики відчули, що теорія множин є незадовільною базою, щоб на ній будувати теорію категорій – і математику загалом. Для категористів теорія множин забезпечує вид драбини, що веде від чистої дискретності до теоретико-категорного зображення справжнього математичного ландшафту. Категористи не відрізняються від художників у знаходженні ландшафту (або принаймні його зображення), цікавішого, ніж драбина, яку треба, дотримуючись поради Вітґенштейна, скинути після сходження.

Контрасти між теорією множин і теорією категорій можна підсумувати у наступній таблиці:

Теорія множин	Теорія категорій
Аналітична	Синтетична
Атомістична	Холістична (цілісна)
Статична	Змінна
Арифметична	Геометрична
Зведення математичних концепцій	Пряме представлення математичних концепцій

Загальність теорії категорій дала їй змогу відігравати все зростаючу роль в основах математики. Її поява мала ефект невловимого підриву превалюючої доктрини, що всі математичні концепції повинні посилатися на фіксований абсолютний всесвіт множин. На противагу цьому теорія категорій пропонує, щоб математичні концепції розглядати як такі, що володіють значенням, лише *у зв'язку із* рядом більш чи менш *локальних* рамок. Тлумачення математичної концепції у категорії зводиться до певного сорту заломлення або фільтрування концепції формою, асоційованою із цією категорією. Наприклад, тлумаченням концепції *група* у категорії топологічних просторів є *топологічна група*, у категорії многовидів – *група Лі*, а в категорії пучків – *пучок груп*. Цим способом концепція групи і багато інших математичних концепцій набувають справді багатогранної загальності і *подальшої двозначності* посилання понад ту, що вже надана їм володінням різних теоретико-множинних реалізацій.

У теорії категорій перетворення – *відображення, морфізми* або *стрілки* – між структурами – об'єктами – грають роль, яка жодною мірою не підпорядкована ролі, яку відіграють самі структури. Теорію категорій, отож, можна порівняти з мовою, у якій дієслова є нарівні з іменниками. У цьому відношенні теорія категорій вирішально відрізняється від теорії множин, у якій відповідне поняття функції зведене до концепції "множини". Як наслідок, поняття перетворення у теорії категорій у величезній мірі більш загальне, ніж теоретико-множинне поняття функції. Зокрема, перше допускає тлумачення, у яких одна змінна кількість залежить функціонально від іншої, але де відповідна "функція" не є описувана як множина (впорядкованих пар) "точок" (наприклад, коли функціональна залежність виникає як феноменологічний опис руху тіла.) Той факт, що у теорії категорій концепція перетворення є незвідним базисним даним, робить можливим розглядати стрілки у категоріях, як формальні втілення ідеї *чистої варіації* або *кореляції*, тобто ідеї *змінної кількості* у її початковому передтеоретико-множинному розумінні. Наприклад, у теорії категорій змінний символ x із областю варіації X тлумачать як *тотожну стрілку* 1_X і цю концепцію далі не піддають аналізові, як у теорії множин, де вона є просто множиною впорядкованих пар вигляду (x, x). Отож, змінна x тепер пропонує ідею чистої варіації над областю, саме так, як малося на увазі у звичайному функціональному позначенні $f(x)$. Цей останній факт виражається у теорії категорій "тривіальною" аксіоматичною умовою

$$f \circ 1_X = f,$$

у якій символ x не з'являється: вона формально показує, що варіація є у певному розумінні справжньою (внутрішньою) складовою частиною категорії.

Є низка версій специфічно *теоретико-категорних основ* для математики. Перша висунута у 1965р. Лойєром. У "Категорії категорій як основі для математики" він стверджує:

> "У математичному розвитку останніх десятиліть ясно бачимо виникнення переконання, що важливі властивості математичних об'єктів – це ті, які можна сформулювати радше в термінах їхньої абстрактної структури, ніж в термінах елементів, з яких, як вважалося, складені об'єкти. Отож, природно постає питання, чи можна дати основу для математики, що виражає відверто це переконання стосовно того, про що є математика, і зокрема, в якій *класи і членство в класах не грають будь-якої ролі.* Тут під 'основою' ми розуміємо єдину систему аксіом першого порядку, у яких можна означити всі звичайні математичні об'єкти і довести всі їхні звичайні математичні властивості. Основа того сорту, який ми маємо на увазі, очевидно була би значно більш природною і легко використовуваною, ніж класична при розвитку таких предметів, як алгебраїчна топологія, функціональний аналіз, теорія моделей загальних алгебраїчних систем і т.ін. Зрозуміло, будь-яка така основа має рахуватися із теорією категорій і функторів Ейленберга-Маклейна. Автор вважає, що найбільш прийнятний спосіб прийти до основи, що відповідає цим

вимогам, – просто записувати аксіоми, що описують властивості, які має інтуїтивно зрозуміла категорія всіх категорій, поки не прийдемо до інтуїтивно відповідного (адекватного) списку; ось, по суті, як прийшли до теорії, описаної нижче. Потім повинні бути доведені різноманітні метатеореми, щоб допомогти виправдати відчуття відповідності."

Отож, Лойєр, зокрема, пропонує використання певної *теорії першого порядку – елементарної теорії категорії категорій* як основи для математики. Така пропозиція наштовхується на трудність заперечення, яке зробив Мейберрі до ідеї використання будь-якої аксіоматичної теорії як основи для математики. У 1981р. Белл зазначив з цього питання:

"У якому розумінні теорія категорій могла би служити основою для математики? ... По-перше, сильне розуміння, у якому *всі* математичні концепції, включаючи концепції поточних логіко-метатеоретичних рамок для математики, пояснювані у теоретико-категорних термінах. Тепер мені здається неправдоподібним, що теорія категорій є або могла би бути основоположно відповідною у цьому сильному розумінні. Бо розгляньте метатеоретичні рамки, у які вкладена теорія категорій (або будь-яка інша теорія першого порядку). Ці рамки мають два базисні аспекти: *комбінаторний*, який має справу із формальними, скінченно представленими властивостями написів охоплюючої формальної мови, і *семантичний*, який має справу із тлумаченням і істиною виразів тої мови. Ні один із цих аспектів не є – у даний час – звідний до другого. Перший займається *інтенсіональними (змістовними)* об'єктами такими як доведення і побудови, фактичне *представлення* яких вирішальне, натомість другий застосовує *екстенсіональні* (тобто визначувані із вказанням області визначення) об'єкти такі як класи, ідентичність яких визначена незалежно від того, як вони могли бути представлені або означені. Тому якщо теорія категорій повинна надати основу для математики у сильному сенсі, вона мусить забезпечити переконливі описи *обох* цих аспектів. Але категорія визначена як клас певного виду, а класи є *екстенсіональними*, в той час як комбінаторні об'єкти загалом *не є*. Оскільки немає причини припускати, що задовільний опис інтенсіональних об'єктів можна дати виключно в термінах екстенсіональних, мені здається, що теорія категорій, як вона сформульована поточно в термінах класів, не в стані забезпечити вірний опис принаймні комбінаторного аспекту. (Звичайно, ця слабкість поділяється теорією множин.)

Що стосується *семантичного* аспекту, нагадаємо, що тлумачення виразу класичної мови першого порядку містить суттєвим способом посилання на *класи* або *множинності* (як множини значень змінних у виразі). Зокрема, осягнення концепції *логічної істини* для висловлень класичних мов першого порядку вимагає, щоб вже було осягнено концепцію класу. Іншими словами, концепція класу *епістемічно (пізнаннєво) передує* концепції (класичної) логічної істини. Тому якщо теорія категорій повинна служити автономною базою для класичної семантики і, зокрема, давати задовільний незалежний опис логічної істини, то мусить бути можливо дати опис класу (принаймні постільки, поскільки він включений у виведення концепції логічної істини) *виключно в термінах поняття категорії* і не маючи в наявності вже означеного останнього поняття в термінах класів. Але це видається мені дуже сумнівним, тому що, напевно, неструктуроване поняття класу пізнаннєво передує будь-якому більш високо структурованому поняттю як категорія: щоб знати, що таке категорія, ви спершу повинні знати, що таке клас. Це застосовується *з відповідними змінами* до поняття *функтора*, пояснення якого містить осягнення ідеї *операції*.

Мені здається, ці міркування показують, що теорія категорій, як вона розуміється поточно, не здатна служити основою для математики у сильному розумінні. Звичайно, це навряд чи дивно, оскільки широко визнано, що *ніяка* єдина основоположна схема на даний час не здатна забезпечити переконливе пояснення комбінаторних і теоретико-множинних об'єктів. Чим ми фактично володіємо – це є неформальна система багаточисленних основ із різними теоретико-множинними і комбінаторними складниками."

Однак він відчуває, що

"Теорія категорій – це більше, ніж ще одна математична теорія. Подібно до теорії множин, вона забезпечує загальні рамки для занять із математичними структурами і – знову подібно до теорії множин – вона досягає цього, переступаючи частковість структур. Але теорія множин і теорія категорій, роблячи це, йдуть різними шляхами. Теорія множин зриває структуру з онтології математики, залишаючи множинності безструктурних індивідів, відкритих до накладання нової структури. Теорія категорій, з іншого боку, переступає часткову структуру, не зриваючи її геть, а узагальнюючи її, тобто пред'являючи аксіоматичну загальну теорію структури. Успіх теорії категорій та її значення для основ завдячують всюдисутності структур у математиці. Можна сказати, що хоча теорія категорій залежна все-таки від теорії множин, як остаточного джерела математичних сутностей, вона все ж звільнює математику від часткової форми, накладеної на неї розглядом цих сутностей як дискретних множинностей елементів."

Подальша робота з аксіоматизації категорії *Cat* категорій була виконана Бланком і Донадьє. У їхній аксіоматизації показано, що (мета)категорія дискретних об'єктів (тобто двійник категорії множин) є правильно вказаним топосом. Доведення Бланка і Донадьє виконані у класичній логіці і припускають аксіому вибору. Цікаво визначити, чи їхню систему можна забезпечити підходячим конструктивним формулюванням таким способом, щоб категорія дискретних об'єктів була елементарним топосом. Підходячі конструктивні аксіоми для *Cat* можна знайти, аналізуючи її структуру у вільному топосі (див. нижче).

Ще один підхід до теоретико-категорних основ математики – через поняття (елементарного) *топоса*. Хоча теорія топосів започаткована у теорії пучків, яка сама виникла з алгебраїчної топології і алгебраїчної геометрії, концепцію топоса можна подати, як узагальнення концепції множини. Отож, починаємо із знайомої категорії SA, об'єктами якої є всі множини (для точності, у заданій моделі M теорії множин) і всі стрілки якої є відображеннями (в M) між множинами (в M). Зауважуємо, що SA має наступні властивості:

1. Є 'кінцевий' об'єкт 1 такий, що для будь-якого об'єкта X існує єдина стрілка $X \to 1$ (для 1 робимо одноелементну множину, зокрема $\{0\}$).

2. Будь-яка пара об'єктів A, B має декартів добуток $A \times B$.

3. Для будь-якої пари об'єктів A, B можна утворити показниковий (експоненціальний) об'єкт B^A всіх відображень $A \to B$.

4. Існує об'єкт значень істинності Ω такий, що для кожного об'єкта X існує природна відповідність між підоб'єктами (підмножинами) X і стрілками $X \to \Omega$. (Замість Ω можна взяти множину $2 = \{0, 1\}$; стрілки $X \to \Omega$ тоді є *характеристичними функціями* на X, а показниковий об'єкт Ω^X відповідає *степеневій множині* множини X.)

Всі чотири умови можна сформулювати на мові першого порядку категорій: категорія, що задовольняє їх, називається (елементарним) топосом. Концепція топоса є концепцією великої загальності. Не тільки PA є топосом, а й, наприклад: (1) категорія булево-значних множин і відображень у булевому розширенні моделі теорії множин; (2) категорія пучків або передпучків множин на топологічному просторі; (3) категорія всіх діаграм відображень множин

$$X_0 \to X_1 \to X_2 \to \dots$$

Об'єкти кожної з цих категорій можна розглядати як множини, які *змінюються* деяким способом: у випадку (1) над *булевою алгеброю*, у випадку (2) – над *топологічним простором*, і у (3) – над *дискретним часом*. (Тому на цій мові сама категорія PA є категорією множин, що "змінюються" над одноточковою множиною 1.) Ці приклади вказують, що топос можна розуміти як категорію *змінних множин*: знайома категорія PA є граничним випадком, у якому варіацію об'єктів можна звести до нуля. Із цієї причини PA називається *топосом постійних множин*. Отож, подібно до поняття самої категорії, концепція топоса виявляється ще одним прикладом діалектичної процедури заміни *постійного змінним*.

У топосі поняття чистої варіації поєднується із фундаментальними принципами побудови, що використовується у звичайній математиці через теорію множин, тобто утворення *продовження предиката, декартові добутки і функціональні простори*.

У теорії множин є природні "логічні операції", визначені на об'єкті 2 значень істинності "теоретико-множинних" операцій на частинах областей визначення – ідея, вперше зроблена явною Булем. Багатство внутрішньої структури топоса дає змогу перенести цю відповідність туди також. Отож, у будь-якому топосі $\mathcal{E}$ одержуємо природні стрілки, визначені на його об'єкті Ω значень істинності, про який можна думати, як про внутрішньо визначені "логічні операції" на $\mathcal{E}$. Оскільки ці логічні операції визначені цілком у термінах внутрішьої структури топоса, топос можна розглядати як *апарат для синтезування логіки з математики.* Логічні операції, що виникають цим способом, загалом підпорядковуються законам інтуїціоністської логіки: звичайно $\neg \circ \neg \neq \neg$. У топосі Ω є, загалом, *алгеброю Гейтінґа.* (У топосі пучків над топологічним простором X точки Ω відповідають відкритим множинам X. Тому Ω рідко є булевою алгеброю у цьому випадку.) Структура Ω визначає (детермінує) *внутрішню логіку* охоплюючого топоса. Класична двовалентна логіка вимагає, щоб Ω мала тільки дві точки **істина, хиба**, так що $\Omega = 2$. Це тягнеться умовою, що будь-яке співвідношення можна звести до постійності таким способом: для будь-яких $f, g : A \to B$, якщо для всіх $1 \xrightarrow{x} A$, $fx = gx$, то $f = g$. (Доведення: припустимо $U \rightarrowtail 1$, $U \neq 0$ і утворимо $U + U$. Тоді є дві різні стрілки $U \to U + U$, і звідси стрілка $1 \to U$. З цього випливає, що $U = 1$.)

У топосі, як і в теорії множин, кожний об'єкт – і насправді кожну стрілку – можна розглядати у певному розумінні як продовження $\{x : P(x)\}$ деякого предиката P. Різниця між цими двома ситуаціями є та, що в той час як у теоретико-множинному випадку змінну x можна тлумачити *шляхом заміни*, тобто як таку, що змінюється над іменами для індивідів, у загальному топосі це не так: "x" мусить розглядатися як *справжня змінна.* Точніше, в той час як у теорії множин маємо правило висновування

$$\frac{P(a) \text{ для кожного індивіда } a}{\forall x \; P(x)},$$

загалом це правило не виконується у внутрішній логіці топоса. Фактично, припускаючи класичну теорію множин, як метатеорію, правильність цього правила у внутрішній логіці топоса вимушує його бути моделлю класичної теорії множин: цей результат можна підходяче переформулювати у конструктивній постановці.

[Великий інтерес становить нещодавній розвиток у співвідношенні між теорією категорій і теорією множин – відкриття Джойялом і Моердійком концепції *алгебри Цермело-Френкеля.* Це по суті формулювання теорії множин, базоване радше на множинних *операціях*, ніж на властивостях відношення членства. Цими двома операціями є *об'єднання* і *одноелементна множина*, а алгебри Цермело-Френкеля – це алгебри для операцій цих типів. (Між іншим, можна зазначити подібність алгебр Цермело-Френкеля до "мегетологічного" формулювання Д.Льюісом теорії множин.) Джойял і Моердійк показують, що звичайна система аксіом ZF Цермело-Френкеля теорії множин із фундуванням є по суті описом (у теормінах відношення членства) *вільної* або *початкової* алгебри Цермело-Френкеля, просто як аксіоми Пеано для арифметики описують вільний або початковий моноїд на генераторі. Цю ідею можна продовжити так, щоб одержати характеризацію класу *ординалів фон Неймана*, як вільної алгебри Цермело-Френкеля певного виду. Отож, добре фундовану теорію множин і теорію ординалів можна охарактеризувати теоретико-категорно природним способом.]

Теорія топосів робить значно більше, ніж просто реорганізовує математичні матеріали, забезпечені теорією множин: її функція далеко перевищує чисто косметичну. Це вражаюче ілюструється різними моделями топосів (**Spaces**) – *синтетичної диференціальної геометрії* або *гладкого інфінітезімального аналізу.* Тут є явне представлення виду гладко неперервного, що включає нескінченно малі величини, які просто *несумісні* із класичною теорією множин: вид неперервного, який, словом, *не можна* звести до дискретного. У цих моделях *всі* перетворення є гладко неперервними, реалізуючи вислів Лейбніца *природа не робить стрибків* і пропозиції Вейля у *Привиді модальності* і ще десь. У Spaces всі співвідношення між об'єктами є неперервними і логіка тут *не може* бути бівалентною. (Тому що зв'язний континуум не має непостійних неперервних відображень у 2, але володіє багатьма нетривіальними частинами. Тому Ω не може збігатися з 2.) Все ж продовження предикатів і інші математичні побудови все ще можна утворити звичайним способом (підпорядкованим інтуїціоністській логіці). Ще дві захоплюючі риси неперервності виявляють себе. По-перше, зв'язні континууми є *нерозкладними*: ніяка непорожня частина зв'язного континуума не має "властивого" доповнення – порівняйте із твердженням Анаксагора у 450р. до н.е., що (неперервний) світ не має частин, які можна "обрізати віссю". І, по-друге, будь-яку криву можна розглядати, як накреслену рухом *нескінченно малого дотичного вектора* – сутності, що втілює (класично нереалізовну) ідею *чистого напряму* – отож, дозволяючи прямий розвиток числення і диференціальної геометрії, що використовує нільпотентні нескінченно малі кількості. Ці майже чудесні і все ж природні ідеї, з якими *не можна* займатися зв'язно зведенням до дискретного, або поняття "множини розрізнених індивідів" (порівняйте із Расселом, який у *Принципах математики* різко засудив нескінченно малі, як "не необхідні, помилкові і самосуперечливі"), можна явно сформулювати у теоретико-категорних термінах і розвинути, використовуючи формалізм, який подібний до традиційного.

Встановлення сумісності гладкого інфінітезімального аналізу побудовою моделей топосів є дещо трудомісткою справою, значно складнішою, ніж процес побудови моделей для більш знайомої (дискретної) теорії нескінченно малих, відомої як *нестандартний аналіз*. Белл вважає, що ситуацію тут можна пов'язати із використанням складного фільмопроектора, щоб показати просте зображення (у цьому випадку зображення ідеальної гладкості) або із черепно-мозковою діяльністю мозку, заплутана нейрохімічна структура якого придумує, як представити прості зображення свідомості. Справа в тому, що хоча пристосування гладких топосів ні в якому випадку не є простим процесом, воно заплановане, щоб зрозуміти прості принципи. Шлях до простоти мусить інколи йти через складне.

Одним із підходів до основ математики, що застосовує теорію топосів, є ідея, яку Белл висунув кільканадцять років тому, а саме "локальної математики". Тут фундаментальна ідея полягає в тому, щоб

> "відмовитися від єдиного абсолютного універсуму множин, центрального в ортодоксальному теоретико-множинному викладі основ математики, замінюючи його множинністю локальних математичних рамок – *елементарних топосів* – визначених в теоретико-категорних термінах. Такі рамки служитимуть локальними замінниками для класичного універсуму множин. Зокрема, вони володітимуть достатньо багатою внутрішньою структурою, щоб дати змогу тлумачити математичні концепції і твердження в них. Полишивши абсолютний універсум множин, ні математичні концепції загалом більше не володітимуть абсолютним значенням, ні математичні твердження – абсолютними значеннями істинності, а замість цього володітимуть такими значеннями істинності тільки

локально, тобто *щодо* локальних рамок."

І він продовжує:

> "Техніка Коена і його наступників привела до величезного розростання моделей теорії множин із суттєво різними математичними властивостями, що у свою чергу породило тривожну непевність в умах теоретиків, як ідентифікувати "справжній" універсум множин, або принаймні щодо того, якими математичними властивостями він повинен володіти. Результат такий, що концепція множини – у такій мірі, як вона схоплюється аксіомами першого порядку – виявляється *радикально недовизначеною.* Я пропоную *прийняти* радикально недовизначену природу концепції множини і *відкинути* пошук абсолютного універсуму множин у формі, що пропонується класичною теорією множин."

Потім він цілковито попрощався із поміркованістю, пропонуючи, щоб значення або посилання теоретико-множинних концепцій було визначено *локально*, тобто в елементарних топосах (які тут називаються "локальними рамками"). У такому випадку

> "твердження типу континуум-гіпотези більше не буде розглядатися як власник абсолютного, але невідомого значення істинності, тому що єдиний універсум множин, який за припущенням мав забезпечити те значення, більше не існуватиме. Однак зазначимо, що хоча концепція *абсолютної істини* теоретико-множинних тверджень мусить зникнути зі сцени, на її місці з'явиться тонша концепція *інваріантності*, тобто *правильності у всіх локальних рамках.* Отож, в той час, як теореми конструктивної арифметики виявляться володіючими властивістю інваріантності, аксіома вибору або континуум-гіпотеза – ні, тому що вони виконуватимуться у деяких локальних рамках, а в інших – ні."

Топоси – це саме моделі для теорій, сформульованих природною мовою типів високого порядку, базованій на інтуїціоністській логіці. Кожний топос $\mathcal{E}$ асоційований із такою мовою, типи якої підходять об'єктам $\mathcal{E}$ і функційні символи якої підходять стрілкам $\mathcal{E}$. Якщо у такій мові задано теорію T, можна побудувати (*локальну теорію множин*) топос $\mathcal{E}_T$, правильними висловленнями якого будуть точно висловлення із T, і навпаки, якщо задано топос $\mathcal{E}$, можна утворити теорію $T_{\mathcal{E}}$ (множину висловлень, істинних в $\mathcal{E}$), асоційований топос якої $\mathcal{E}_{T_{\mathcal{E}}}$ категорно еквівалентний до $\mathcal{E}$.

Будь-який топос можна розглядати як математичну область визначення дискурсу або "світ", у якому можна тлумачити математичні концепції і виконувати математичні побудови. У такому випадку асоційовану локальну теорію множин можна трактувати як "карту", що відображає той світ. Точно як всі карти в атласі поділяють спільну геометрію, так і всі локальні теорії множин поділяють спільну логіку – інтуїціоністську логіку типів.

У топосі $\mathcal{E}$ стрілки $1 \to \Omega$ є *значеннями істинності* тверджень, інтерпретованих в $\mathcal{E}$. Завжди є принаймні два значення істинності $\top, \bot : 1 \to \Omega$, відповідні до істинності і хибності, але може бути більше, ніж просто ці два. Топос, у якому вони є єдиними значеннями істинності, називається *бівалентним*; ця властивість відповідає *повноті* асоційованої локальної теорії множин. Оскільки істина в топосі відповідає довідності в локальній теорії множин і більшість локальних теорій множин є *неповними*, то мусимо бути готові прийняти явище *полівалентності*, тобто той факт, що математичні твердження – сформульовані у локальних теоріях множин і інтерпретовані в топосах – загалом володітимуть значеннями істинності, *відмінними* від істинності або хибності.

Топос і асоційовану до нього теорію можна розглядати як дуальні аспекти тої самої сутності – назвемо її *світом* – топос утворює, так сказати, його *речовину*, а теорія – *форму*. Подібно до роботи вимислу, речовина світу цілком визначена його формою: на будь-яке (змістовне) питання, яке можна задати про речовину, можна відповісти у формі або, якщо ні (як у випадку неповної теорії), мусимо розглядати його як таке, що не має визначеної відповіді у даному світі. Просто як, наприклад, у *Замку* Кафки букви, що залишаються, імені головного героя К мусять залишатися вічно невизначеними, оскільки ніяке вивчення тексту ніколи не відкриє їх, так, аналогічно, 'істинність' або 'хибність' континуум-гіпотези завжди залишатимуться невизначеними у світі, асоційованому із вільною класичною локальною теорією множин.

Теорія топосів приводить до узгодження між *формальними* і *суттєвими* поняттями:

Формальні	**Суттєві**
Локальні теорії множин	Топоси
Чиста локальна теорія множин	Вільний топос
Довідність	Істина
Повнота	Бівалентність

Обмежуючи увагу до лівого боку цієї схеми, дістаємо *формалізм*; до правого – *реалізм* (або платонізм). Узгодження між лівим і правим боками цієї схеми підказує можливість зближення між цими двома протилежними доктринами, що простягається на ті частини математики, які формулюються у топосах або локальних теоріях множин.

Колін Макларті представив центральну частину теорії топосів із рішучістю:

> "Справа в тому, що теорія топосів описує об'єктивні структури. Світ навколо нас має геометричну структуру, яку можна ідеалізувати у поняття гладких просторів і відображень, як це справді було у класичному аналізі на службі ньютонової і пізніше ейнштейнової фізики. Гладкий топос **Spaces** формалізує цю структуру. Ще одна абстракція йде від геометрії, щоб подивитися на світ в термінах чистої потужності. Це канторова теорія множин, яка формалізована у топосі **Set**. Ще інший трактує функції як процедури і тому вимагає від них мати алгоритми. Це формалізовано у частині ефективного топоса **Eff**. Це не є конкуруючі теорії, більш чи менш суперечливі: вони є альтернативами, що підходять до різних цілей. Немає змістовного питання, чи всі функції з дійсної прямої на себе справді є диференційовними, чи всі функції з натуральних чисел на себе є рекурсивними. Радше нам потрібно вивчати обидві ці та інші

ідеалізації та відношення між ними, чи ми моделюємо їх у множинах топосів чи ще якось."

Теорія топосів згідно із Макларті є об'єктивною і в той сам час плюралістичною: топоси ідеалізованим способом описують об'єктивні аспекти світу, але ні один топос не описує світ у його цілісності. Це дещо схоже на погляд Арістотеля на форми: схоплені розумом через процес абстракції з чуттєвих об'єктів, але які не досягають тим самим автономного існування, окремого від цих останніх.

Є різні аналогії між теорією топосів і теорією відносності. Їх можна підсумувати у наступній відповідності:

Теорія відносності	**Теорія топосів**
Геометризація фізики. Кожну фізичну величину можна представити як геометричний об'єкт і кожний фізичний закон виразити геометрично	*Категоризація математики.* Кожну математичну концепцію і кожне математичне твердження можна виразити категорно
Відносність фізичних концепцій. У теорії відносності фізичні величини такі як маса, довжина і енергія вимірюють щодо координатної системи або системи відліку (звичайно інерційної). Отож, виміряні значення цих величин не є абсолютні, а визначені лише щодо координатної системи, щодо якої здійснюється вимірювання. Звичайно, у випадку маси, наприклад, можна запровадити концепцію маси спокою, тобто маси, виміряної у координатній системі, щодо якої тіло нерухоме. Це інваріантна величина, але все ж включає посилання на координатну систему, так що навіть її не можна розглядати як міру атрибута, цілковито притаманного тілу. Масу спокою можна розглядати як абсолютну величину тільки якщо би існувала абсолютна координатна система (абсолютний простір), щодо якої тіло нерухоме. Проте у теорії відносності немає абсолютного простору, а лише простір-час.	*Відносність математичних концепцій.* У теорії топосів математичні концепції і твердження інтерпретуються в локальних математичних рамках, тобто топосах. Це приводить до відносності математичних концепцій, що добре ілюструється явищем *кардинального колапсу* (парадокс Сколема). Припустимо, що задана множина I у топосі S постійних множин і I має незліченну потужність в S. Тоді можна зсунутись (допустимим відображенням – див. нижче) до нових локальних рамок S' (булеве продовження S), у якому потужність I злічена. Згідно з цим потужність нескінченної множини не є абсолютною, а визначеною відносно локальних рамок, щодо яких "вимірюється" потужність. Можна, певно, перезапровадити ступінь інваріантності цій концепції, визначаючи "істинну" потужність I, як її потужність щодо початкових рамок S, в яких розміщено I. Але це означення знову містить посилання на рамки і його не можна розглядати як таке, що визначає атрибут, притаманний I. Єдина можливість, за якої потужність I могла би розглядатися як абсолютна, виникне, коли рамки S абсолютні або універсальні (*універсум множин*). Проте теорія категорій вказує, що такі рамки не існують.

Допустимі зміни локальної координатної системи. У спеціальній теорії відносності це перетворення Лоренца; у загальній – гладкі відображення.	*Допустимі перетворення між локальними рамками.* У теорії топосів це неперервні відображення – *геометричні морфізми.* Точно як в астрономії здійснюють зміну координатної системи, щоб спростити опис, наприклад, планети, так стає також можливо спростити формулювання математичної концепції, здійснюючи зсув математичних рамок. Розглянемо, наприклад, концепцію "дійснозначна неперервна функція на топологічному просторі X". Будь-яку таку функцію можна розглядати як дійсне число (або величину), що змінюється неперервно над X. Тепер розглянемо топос $Sh(X)$ пучків на X. Тут *все* змінюється неперервно над X, тому зсув від S до $Sh(X)$ зводиться до розміщення себе в рамках, які ніби-то самі *рухаються разом* із варіацією над X будь-якого заданого змінного дійсного числа. Це спричиняє, що його варіація не помічається в $Sh(X)$; згідно з цим воно розглядається як *постійне* дійсне число. Цим способом концепція "дійснозначна неперервна функція на X" перетворюється в концепцію "дійсного числа", коли інтерпретується в $Sh(X)$. Іншими словами, можна сказати, що концепція "дійсного числа", інтерпретована в $Sh(X)$, відповідає концепції "дійснозначної неперервної функції на X", інтерпретованої в S. Тому у теорії топосів математична концепція може володіти фіксованим *сенсом*, але змінним *посиланням. Сенс* концепції "дійсне число" можна вважати фіксованим за її означенням в локальній теорії множин, але її *посилання* змінюється із рамками інтепретації.
Інваріантні фізичні закони. Це твердження математичної фізики (наприклад, рівняння Максвелла), які будучи сформульованими відповідно, виконуються в кожній локальній координатній системі.	*Інваріантні математичні закони.* Це математичні твердження, які виконуються у кожних локальних рамках, тобто теореми інтуїціоністської логіки високого порядку. Отож, інваріантні математичні закони – це ті, що довідні *конструктивно.* Теорема класичної логіки, яка не є теоремою інтуїціоністської логіки, (наприклад, закон виключеного третього) не виконуватиметься універсально, якщо тільки вона не була перетворена в її інтуїціоністський корелят,

	наприклад, ґеделевим перекладом. Процедура перекладу класичної в інтуїціоністську логіку є математичним двійником відливки фізичних законів в інваріантну (або коваріантну) форму.
Інерційні координатні системи. Правильність ньютонового першого закону руху виділяє інерційні координатні системи серед усіх можливих. (Інерційна координатна система – це така, в якій початково нерухоме тіло залишається нерухомим за умови, що воно не піддається дії сил.) Це класичні координатні системи, що діють як локальні замінники для ньютонівського абсолютного простору.	*Класичні локальні рамки.* Істинність *аксіоми вибору* у локальних рамках $\mathcal{E}$ тягне, що внутрішня логіка $\mathcal{E}$ є класичною. Локальні рамки, що задовольняють аксіому вибору, тоді можна розглядати як володіючі суттєвими властивостями класичної моделі теорії множин, тобто як локальний замінник для абсолютного універсуму множин. Згідно з цим аксіома вибору відповідає першому закону Ньютона, а класичні локальні рамки – інерційним координатним системам.
Неінерційні координатні системи. У них тіла піддаються спонтанним змінам швидкості.	*Некласичні топоси.* У них об'єкти піддаються внутрішній "варіації".
Локальна запровідність інерційної координатної системи у кожній точці простору-часу.	*Теорема Барра: кожний топос (Ґротендіка) є сюр'єктивним образом класичного топоса.*
Спеціальний принцип відносності. Будь-яка пара інерційних локальних координатних систем еквівалентна при перетвореннях Лоренца. Ця еквівалентність стверджує,	*Принцип еквівалентності для класичних рамок.* Це теорема Лойєра, що будь-яка пара класичних локальних рамок, пов'язаних допустимим перетворенням, є категорно еквівалентна. Згідно з цим їх не можна розрізнити
що закони фізики еквівалентні в обох системах, тобто їх не можна розрізнити *фізичними* засобами. Припускалося, що *ньютонівський абсолютний простір* забезпечує універсальний інерційний каркас, на який повинні посилатися всі фізичні явища.	*математичними* засобами. Припускалося, що *класичний універсум множин* забезпечує універсальні рамки, на які повинні посилатися всі математичні твердження і концепції.
Глобальний рімановський простір-час/ Контраст між глобальною і локальною фізикою. У загальній теорії відносності глобальний рімановський простір-час утворює універсум або область, у якій всі фізичні явища фактично з'являються:	*Глобальна метакатегорія Top локальних рамок/ Контраст між глобальною і локальною математикою.* У теорії топосів глобальна метакатегорія *Top* локальних рамок і допустимі перетворення є універсумом, у якому "живуть" всі рамки: як така вона замінює класичний універсум множин і утворює метатеорію для локальної

як такий він замінює ньютонівський абсолютний простір і утворює вид об'єктивної метатеорії для локальної фізики. Локальна фізика – це вивчення фізичних явищ, віднесених до локальних координатних систем; глобальна фізика – це вивчення глобального ріманівського простору-часу.	математики. Локальна математика – це вивчення математичних концепцій, відісланих до локальних рамок; глобальну математику (на противагу абсолютній математиці) можна ототожнити із вивченням *Top*. Проте бракує аксіоматизації цієї метакатегорії.

Ідея допустимого перетворення між топосами приводить до ще одного "діалектичного" феномена, який Белл назвав *запереченням постійності.* Припустимо, що задано топос S постійних множин (тобто таких, що задовольняють аксіому вибору) і допустиме перетворення з S у топос $\mathcal{E}$: будемо говорити, що $\mathcal{E}$ *визначено* над S. Під "множиною" розумітимемо "об'єкт S". Можемо розглядати $\mathcal{E}$ як рамки, які діють, коли об'єктам $\mathcal{E}$ дозволено *змінюватися* певним способом: наприклад, коли $\mathcal{E}$ – це $Sh(X)$, об'єктами $\mathcal{E}$ є об'єкти S, що "змінюються" неперервно над відкритими множинами X. Отож, у переході від S до $\mathcal{E}$ ми діалектично *заперечуємо* "постійність" об'єктів в $\mathcal{E}$ і, роблячи це, привносимо "варіацію" або "зміну" в нові об'єкти $\mathcal{E}$. Коротше, у переході ми *заперечуємо постійність.*

Тепер у певних важливих випадках, у свою чергу, можна продовжити, щоб діалектично заперечити "варіацію" в $\mathcal{E}$ і одержати нові класичні рамки S^*, в яких постійність знову переважає: можна вважати, що S^* виникло з S у діалектичному процесі *заперечення заперечення.* Загалом S^* не еквівалентно до S, і тому, згідно із добре відомим результатом із теорії топосів, перехід від $\mathcal{E}$ до S^* – другого "заперечення" – не може бути допустимим перетворенням (але є "логічним" функтором). Отож, дія заперечення заперечення у такому розумінні *переступає межі* допустимості: це ціна, стягнена за відновлення постійності у переході під кінець до S^*. Це можна вважати гарним прикладом геґелівського *Aufhebung* – "зняття" або "синтезу".

Цей частковий вид зняття можна уявляти як такий, що лежить в основі двох ключових досягнень в основах математики – *робінсонівського нестандартного аналізу* і *коенівських доведень незалежності у теорії множин.*

Якщо задана множина I, кожний елемент $i \in I$ можна ототожнити із головним ультрафільтром $U_i = \{X \subset I : i \in X\}$ над I. Це ототожнення підказує, що можна думати про *довільні* ультрафільтри над I, як *узагальнені точки* I. Колекція узагальнених точок I утворює нову множину βI (яку топологи називають компактифікацією Стоуна-Чеха множини I). Ототожнюючи I із підмножиною βI, називаємо елементи I *стандартними* точками I, а алементи $\beta I - I$ – *ідеальними* точками I. Якщо I нескінченна, вона завжди має ідеальні точки.

Тепер розглянемо топос S^I множин, що змінюються над I. Об'єкти S^I – які ми називатимемо *змінними* множинами – це I-індексовані сімейства множин $X = \langle X_i : i \in I\rangle$. 'Елемент' змінної множини X – це I-індексоване сімейство $x = \langle x_i : i \in I\rangle$ таке, що $x_i \in X_i$ для всіх $i \in I$, тобто функція вибору на X. Отож, декартів добуток $\prod\limits_{i\in I} X_i$ – це множина 'елементів' змінної множини X.

Кожна (постійна) множина A асоційована із змінною множиною $\hat{A}$, заданою функцією на I із постійним значенням A. Множиною елементів $\hat{A}$ є A^I. Відображення $A \mapsto \hat{A}$, $X \mapsto \prod\limits_{i \in I} X_i$ визначають допустиме перетворення із S в S^I.

Якщо задано елемент $i_0 \in I$, можемо затримати варіацію будь-якої змінної множини X, *оцінюючи* в i_0, тобто розглядаючи X_{i_0}. Якщо застосувати це, зокрема, до множини A^I 'елементів' змінної множини $\hat{A}$, тобто якщо ми оцінимо кожний такий 'елемент' в i_0, то просто відновимо A. Тому у такому випадку, якщо ми заперечуємо постійність (елементів) A, переходячи до множини A^I (змінних) елементів A, а потім заперечуємо варіацію тих останніх, оцінюючи у *стандартній* точці I, ми зробили повне коло. Однак ситуація рішуче інакша, коли оцінка зроблена в ідеальній точці I.

Якщо задано ідеальну точку U множини I, тобто неголовний ультрафільтр над I, як 'оцінити' функції з A^I в U? Із цією метою зауважимо, що результат оцінювання в стандартній точці i_0 множини I по суті той самий, що й *ототожнення* функцій з A^I, коли їхні значення в i_0 співпадають, тобто накладання умови, що для $f, g \in A^I$

$$f \approx_{i_0} g \text{ я.т.я. } f(i_0) = g(i_0) \text{ я.т.я. } \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U_{i_0}.$$

Останню еквівалентність використовують як базу для оцінювання функцій із A^I в ідеальній точці U множини I. Тобто визначають

$$f \approx_U g \text{ я.т.я. } \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U.$$

Тоді результат 'оцінювання' всіх функцій із A^I в U є множиною A^* класів еквівалентності A^I за модулем $\approx_U$. Добре відомо, що якщо I нескінченна (і U – ідеальна точка I), то A^* не може співпадати із A. Зокрема, якщо, наприклад, A є дійсною прямою $\mathbb{R}$, то $\mathbb{R}^*$ матиме такі самі елементарні властивості як $\mathbb{R}$, але на додачу матиме нові 'нескінченні' і 'нескінченно малі' елементи. Тобто $\mathbb{R}^*$ буде *нестандартною моделлю дійсних чисел*. Це, по суті, база нестандартного аналізу Робінсона.

Коротше кажучи, ми дістали робінсонівські нескінченно малі 'зняттям': спершу заперечуючи постійність класичної дійсної прямої, а потім заперечуючи отриману варіацію затриманням її в ідеальній точці.

Якщо тепер затримаємо варіацію всіх об'єктів S^I *одночасно* в ідеальній точці множини I, то одержимо новий постійний топос S^* (ультрастепінь або збільшення S), який має такі самі елементарні властивості як S. Так цей приклад 'зняття' приводить до постійного топоса, який хоча не тотожний із S, все ж *внутрішньо невідрізнюваний* від нього. На противагу цьому вся мета техніки *Коена* у теорії множин полягає в тому, щоб виробити нові постійні топоси, які внутрішньо *відрізнювані* від S.

Нехай P – частково впорядкована множина; думайте про елементи P, як про *стадії знання*, і $p \leq q$ означає, що q є глибша (або, у будь-якому випадку, пізніша) стадія знання, ніж p. Множина, що *змінюється* над P – це відображення X, яке приписує кожному $p \in P$ множину $X(p)$ і кожній парі $p, q \in P$ такій, що $p \leq q$, – таке відображення $X_{pq} : X(p) \to X(q)$, що $X_{pr} = X_{qr} \circ X_{pq}$, як тільки $p \leq q \leq r$. Нехай $\mathcal{E}$ – топос, визначений над S – об'єктами якого є всі множини, що змінюються над P (і в якому стрілка $f : X \to Y$ – це колекція відображень $F_p : X(p) \to Y(p)$

таких, що $f_q \circ X_{pq} = Y_{pq} \circ f_p$ для $p \leq q$). Про об'єкти $\mathcal{E}$ можна думати як про множини, що змінюються над стадіями знання, зібраними в P.

В $\mathcal{E}$ розглянемо об'єкти X, для яких $X(p) \subseteq X(q)$ і X_{pq} – відображення вкладення для $p \leq q$. Такий об'єкт називається множиною, що *поступово змінюється* над P. Якщо думати про $X(p)$ як про колекцію елементів змінної множини X, *одержаних* на стадії p, то умова 'поступовості' на X означає, що ніякі одержані елементи ніколи не втрачаються. Для $p \in P$ і множин X, Y, що змінюються поступово над P, пишемо

$$p \Vdash X \subseteq Y$$

замість

$$\forall q \geq p \; \forall x \in X \; \exists r \geq q \; [x \in Y(r)],$$

тобто на заданій стадії p об'єкт X *у кінцевому підсумку співпадає* з Y.

Два елементи $p, q \in P$ є *сумісні*, якщо $\exists r \in P \; [p \leq r \& q \leq r]$. Множина сумісних елементів P називається *тілом знання*. Тіло знання *повне*, якщо, як тільки $p \in P$ сумісне з кожним членом K, то p належить до K.

Для заданого повного тіла знання K визначимо відношення еквівалентності $\sim_K$ на колекції множин, що поступово змінюються над P, так:

$$X \sim_K Y \;\leftrightarrow\; \exists p \in K \; [p \Vdash X \subseteq Y].$$

Отож, $X \sim_K Y$ означає, що наше тіло знання K каже нам, що X і Y у кінцевому підсумку співпадають. Колекція класів еквівалентності за модулем $\sim_K$ поступово змінних множин утворює об'єкти *нового* постійного топоса S^*, який, загалом, є внутрішньо *відрізнюваний* від S у тому розумінні, що він не поділяє всіх елементарних властивостей S: S^* фактично є (можливо нестандартним) *коенівським продовженням* S.

Коротше кажучи, топос $\mathcal{E}$ одержаний із S запереченням постійності у дозволі варіації або 'зростанні' по стадіях знання, а коенівське продовження S^* одержане із (об'єктів, що поступово змінюються в) $\mathcal{E}$, звертаючись до повного тіла знання, щоб визначити остаточні тотожності між змінними множинами, тобто заперечити їхню варіацію. Тут перехід від S до S^* – 'зняття' – зберігає деякі із принципів, асоційованих із постійністю множин (наприклад, аксіома вибору, класична логіка), але, як відмінно показав Коен, частково впорядковану множину P можна вибрати таким способом – тепер знайомим кожному множинному теоретику – щоб ґарантувати, що інші такі принципи (наприклад, аксіома конструктивності, континуум-гіпотеза) *порушені* у цьому переході. У переході від S до $\mathcal{E}$ (заперечення постійності) класична бівалентна логіка S замінена інтуїціоністською полівалентною логікою $\mathcal{E}$. Натомість перехід від $\mathcal{E}$ до S^* ('заперечення заперечення') відновлює класичну логіку і деякі, але не всі принципи, асоційовані із постійністю.

Тепер ми могли би *утриматися* від виконання зворотного переходу до постійності (тобто другого 'заперечення') і замість цього залишатися в топосі $\mathcal{E}$ змінних множин. Теоретико-множинні доведення незалежності можна одержати, вивчаючи уважно внутрішні властивості $\mathcal{E}$ (точніше, застосовуючи метод Скотта-Соловея заміни $\mathcal{E}$ на асоційований до нього булевий топос пучків подвійного заперечення).

Якщо ми погодимося більш загально утримуватися від повернення до постійності, то починають виникати деякі по-справжньому вражаючі можливості. Наприклад, у певних більш радикальних виборах топоса $\mathcal{E}$ змінних множин (у якому множини змінюються над певною категорією кілець природним способом) частина $\Delta = \{x : x^2 = 0\}$ дійсної прямої, що складається із нільквадратних нескінченно малих, є невиродженою, і більше того, кожне відображення на дійсній прямій інфінітезімально афінне на Δ, і звідси гладке: отож, $\mathcal{E}$ є моделлю *гладкого інфінітезімального аналізу*. Це одна із нагород, які ще залишаються в рамках змінних множин, рішуче пристосовуючи локальну точку зору, у якій влада постійності і класичної логіки послаблена.

Резюмуючи, заміна абсолютної на локальну математику, на думку Белла, приводить до результату у значному виграші в *гнучкості застосування* математичних ідей і тому пропонує можливість забезпечення переконливого пояснення їхньої "незбагненної ефективності". Тому що тепер замість того, щоб бути змушеними вкладати інтуїтивно задану концепцію на прокрустове ложе абсолютної математики із супутним спотворенням змісту, ми вільні *вибрати* локальну математику, природно підібрану, щоб виразити і розвинути концепцію. До тієї міри, що задана концепція втілює аспекти нашого досвіду справжнього світу, так само і асоційована локальна математика; ефективність останньої, тобто її відповідність із об'єктивною реальністю, втрачає свою надмірність і замість цього стає результатом проекту.

Так локальна інтерпретація математики, що мається на увазі в теорії категорій, тісно узгоджується із невисловленою вірою багатьох математиків, що їхня наука в кінці кінців має справу не з абстрактними множинами, а із структурою справжнього світу.

*

Ламбек і Скотт захищають прийняття *вільного топоса* – елементарного топоса, породженого чистою теорією типів – як відповідної основи для математики. Тут під *теорією типів* розуміють будь-яку систему інтуїціоністської логіки високого порядку, що містить тип $\mathbf{N}$ для натуральних чисел і в якій виконуються аксіоми Пеано для арифметики. *Чиста теорія типів* не містить ніяких типів, виразів і припущень, крім тих, які вона повинна містити як теорія типів. Ламбек і Скотт називають *моделлю* будь-який топос $\mathcal{E}$, який подібний до звичайної категорії множин тим, що задовольняє наступні умови:

1. ніяка суперечність не виконується в $\mathcal{E}$;
2. якщо $p \vee q$ виконується в $\mathcal{E}$, то p виконується в $\mathcal{E}$ або q виконується;
3. якщо $\exists x \in A\ \varphi(x)$ виконується в $\mathcal{E}$, то існує така сутність типу A в $\mathcal{E}$, що $\varphi(a)$ виконується в $\mathcal{E}$.

Ламбек і Скотт показали, що вільний топос є моделлю у цьому розумінні. Вони бачать моделі як можливі математичні світи, прийнятні тим, кого вони називають "поміркованими" інтуїціоністами. Вони стверджують, що серед цих моделей вільний топос виділяється як вид ідеального світу у платоністському розумінні. Зазначаючи, що побудова вільного топоса є мовною (його об'єкти є виразами мови чистої теорії типів), вони стверджують, що в ньому примирені три суперничаючі традиційні філософії:

- інтуїціонізм, згідно з яким тільки пізнавані твердження істинними;
- платонізм (або реалізм), котрий стверджує, що математичні вирази посилаються на сутності, існування яких незалежне від знання, яке ми маємо про них;
- формалізм, головна увага якого на виразах формальної мови математики.

Розумно вважати вільний топос примиренням інтуїціонізму і формалізму. Натомість твердження, що він втілює також платонізм або реалізм, видається сумнівним. Тому що суттєвим складником реалізму є класична логіка, а логіка вільного топоса не є класичною. Вільний булівський топос $\mathcal{B}_0$ видавався би "ідеальним світом" для платоніста, але він не є моделлю у розумінні Ламбека і Скотта. І в той час як $\mathcal{B}_0$ можна розглядати як "примирення" платонізму і формалізму, принаймні у слабкому розумінні, навряд чи можна твердити, що він примирює також інтуїціонізм, оскільки його внутрішня логіка є класичною.

*

Переходимо наприкінці до ідеї *конструктивної теорії типів* (КТТ) як такої, що забезпечує основу для математики. Сама рання теорія типів Рассела була призначена забезпечити основу для математики, але він був, так сказати, "вимушений" до прийняття теоретико-типової позиції, щоб уникнути парадоксів. (До нього Фреґе, не знаючи про парадокси, припускав, що типування не було необхідним, принаймні постільки, поскільки йшлося про універсум об'єктів.) Ідея типування, як природний факт логічного життя, була усвідомлена Г.Вейлем у *Das Kontinuum* (1919), що розпочинається так:

> "*Судження* стверджує *стан справ*. Якщо цей стан справ одержується, то судження *істинне*; інакше воно неістинне. Стани справ, які містять (мають на увазі) *властивості*, є особливо цікавими... Судження, що містить властивості, стверджує, що певний об'єкт володіє певною властивістю, наприклад "Цей листок (даний мені у теперішньому акті сприйняття) має цей визначений зелений колір (даний мені тим самим сприйняттям)". **Властивість завжди приєднана до визначеної категорії об'єкта таким способом, що твердження 'a має ту властивість' є змістовним – тобто виражає судження і тим самим стверджує стан справ – тільки якщо a є об'єктом тої категорії.** Наприклад, властивість 'зелений' приєднана до категорії 'видима річ'. Тому твердження, що, скажімо, етична цінність є зеленою не є ні істинним, ні хибним, а беззмістовним. Судження відповідає тільки *змістовному* твердженню, стан справ – тільки *істинному* судженню; стан справ, однак, *одержується* – чисто і просто. Можливо, беззмістовні твердження можуть з'являтися тільки у думці про мову і ніколи в думці про речі."

Вейль вважав, що незважаючи на роботу Коші, Вейєрштрасса, Дедекінда і Кантора, математичний аналіз на початку 20-го століття не ніс логічного дослідження, тому що його суттєві концепції і процедури містили порочні кола до тої міри, що, як він казав, "кожна клітина (так сказати) цього могутнього організму просякнута суперечністю." У *Das Kontinuum* він намагався подолати це, забезпечуючи аналіз *предикативним* формулюванням – не запроваджуючи ієрархію логічно розгалужених типів, як Рассел і Уайтхед – а радше обмежуючи принцип розуміння (охоплення) до формул, обмежені змінні яких просто пробігають початкові задані сутності (числа). Отож, він обмежив аналіз до того, що можна зробити в термінах натуральних чисел за допомогою трьох базових логічних операцій разом із операцією підстановки і процесом "ітерації", тобто примітивною рекурсією. Вейль зрозумів, що ефект такого обмеження полягав би в пожертвуванні багатьма недовідними центральними результатами класичного аналізу – наприклад, принципу Діріхле, що будь-яка обмежена множина дійсних чисел має найменшу верхню межу – але він був готовий прийняти це як частину ціни, яку треба заплатити за безпеку математики.

Подібно до розгалужених типів Рассела і Уайтхеда, система Вейля поєднала теорію типів і предикативність. Але ні теорія Рассела, ні система Вейля не були повністю "конструктивними" у найстрогішому розумінні слова, бо спільною логікою, що лежала в основі обох, була, звичайно, радше класична, ніж інтуїціоністська. Першою по-справжньому конструктивною теорією типів, у розумінні предикативної і базованої на інтуїціоністській логіці, що піддалася систематичному розвиткові, була теорія Пер Мартіна-Льофа. Його мета у запровадженні теорії полягала, як він формулює, "повномасшабної системи для формалізації інтуїціоністської математики, як вона розвинута, наприклад, у книзі Бішопа". Головна перевага системи Мартіна-Льофа над традиційними інтуїціоністськими системами полягала у дозволі доведенням бути складниками тверджень, даючи цим змогу твердженням виражати властивості доведень, а не просто індивідів, як це було у логіці предикатів першого порядку. Справді, система Мартіна-Льофа забезпечує повне втілення ідеї "твердження-як-типи (або множини)", початково підказаної Куррі, Фейсом і Говардом. В корені концепції "твердження-як-типи" лежить ідеалістичне поняття, яке можна прослідкувати до Канта, що значення твердження не виводиться з абсолютно стандартної істини, зовнішньої до людського розуму, а радше є притаманним очевидності його стверджуваності у формі розумової побудови або доведення. В інтерпретації "твердження-як-типи", і, більщ загально, у конструктивних теоріях типів кожне твердження є типом або множиною або їхніми доведеннями. Головний наслідок той, що *за цієї інтерпретації це єдині множини або типи.* Іншими словами, множина – це *множина доведень*, або, більш загально, побудов. Саме ця риса зробила конструктивну теорію типів особливо зручною для розвитку теорії комп'ютерного програмування. (Тут дещо неясна ідея "розумових побудов" була замінена на точне поняття комп'ютерної програми.)

Ось цитата самого Мартіна-Льофа:

> "Кожний математичний об'єкт є певного сорту або *типу*. Ще краще, математичний об'єкт завжди заданий разом із типом, тобто він є не просто об'єктом, а об'єктом певного типу... Тип визначений приписуванням того, що ми повинні робити, щоб побудувати об'єкт цього типу... Інакше, тип правильно визначений, якщо ми розуміємо ... що означає бути об'єктом цього типу... Зазначимо, що не потрібно, щоб ми могли якось утворити всі об'єкти заданого типу, ні щоб ми повинні були, так сказати, знати всі з них індивідуально. Це лише питання розуміння, що означає

> бути *довільним* об'єктом типу, про який йдеться. *Твердження* визначається приписуванням, як нам дозволено доводити його, і твердження *виконується* або є істинним інтуїціоністично, якщо є його доведення... Однак, воно не буде необхідно поняттю твердження як окремому поняттю із-за цього твердження. Навпаки, кожний тип визначає твердження, а саме, твердження, що тип, про який ідеться, є непорожнім. Це є твердження, яке ми доводимо, виставляючи об'єкт того типу, про який ідеться. У цьому аналізі, виявляється, немає фундаментальної різниці між твердженнями і типами. Радше різниця у точці зору: у випадку твердження ми не так зацікавлені в тому, чим є його доведення, як у тому, чи воно має доведення, тобто чи воно істинне чи хибне, натомість у випадку типу ми, звичайно, зацікавлені в тому, чим є його об'єкти, а не тільки в тому, чи він порожній, чи непорожній."

Ключовим елементом формулювання Мартіном-Льофом теорії типів є відмінність, яка йде від Фреґе, між *твердженнями* і *судженнями*. Твердження (які, як ми бачили, у системах Мартіна-Льофа ототожнені із типами) є синтаксичними об'єктами, на яких можна виконувати математичні операції і які несуть певні формальні співвідношення з іншими синтаксичними об'єктами, що називаються доведеннями. Твердження і доведення є, так сказати, *об'єктивними* складниками системи. З іншого боку, судження типово містять *ідеалістичне* поняття "розуміння" або "схоплення змісту". Отож, наприклад, у той час як 2+2=4 є твердженням, "2+2=4 є твердженням" і "2+2=4 є істинним твердженням" є судженнями.

Мартін-Льоф дотримується Фреґе також у прийнятті правил виведення логіки, щоб займатися радше судженнями, ніж твердженнями. Отож, наприклад, правильною формою правила $\to$-виключення є не

$$\frac{A \quad A \to B}{B},$$

а

$$\frac{A \text{ істинне} \qquad A \to B \text{ істинне}}{B \text{ істинне}}.$$

Тобто це правило не каже, що твердження B випливає із тверджень A і $A \to B$, а що *істинність* твердження B випливає із *істинності* твердження A, поєднаної із істинністю $A \to B$. Загалом, судження можна охарактеризувати як вирази, які з'являються у висновках правил виведення.

Іншим важливим відношенням, у якому Мартін-Льоф наслідує Фреґе, є його наполягання, що судження і формальні правила мусять супроводжуватися повними поясненнями їхнього значення (змісту). (Це різко контрастує із звичайною теоретико-модельною семантикою, яка насправді є нічим іншим, як перекладом з одної об'єкт-мови на іншу.) Зокрема, судження *A є твердженням* можна зробити лише тоді, коли відомо, що є (канонічне) доведення A, а судження *A є істинним твердженням* лише тоді, коли відомо, як знайти таке доведення. Судження і поняття істини, таким чином, є залежними від розуму.

Різні системи Мартіна-Льофа багаті тонкими відмінностями. Наприклад, на додачу до відмінності між твердженням і судженням там є паралельна відмінність між *типом* (або множиною) і *категорією* (або видом). Щоб змогти судити, чи A

є категорією, потрібно могти сказати, який вид об'єктів не виконується під нею і коли вони рівні. Щоб бути в стані зробити подальше судження, що категорія є типом або множиною, потрібно бути в стані уточнити, які її "канонічні" або типові елементи. У судженні, що щось є множиною, потрібно володіти достатньою інформацією щодо її елементів, щоб уможливити сенс квантифікації над нею. Отож, наприклад, натуральні числа утворюють множину $\mathbb{N}$ із канонічними елементами, заданими так: 0 є канонічним елементом $\mathbb{N}$ і якщо n – канонічний елемент $\mathbb{N}$, то $n+1$ – канонічний елемент $\mathbb{N}$. З іншого боку, колекція підмножин $\mathbb{N}$ утворює категорію, а не множину.

Тлумачення "твердження-як-типи" було піддане глибокому аналізу Б.Тейтом. У "Законі виключеного третього і аксіомі вибору" (1990р.) він зазначає:

> "Насправді є дві частини конструктивістської концепції математичного міркування. Одна частина стосується базової ролі понять побудови об'єкта заданого типу... і побудови доведення твердження. Друга частина стосується "ефективного" або "обчислюваного" характеру цих об'єктів або доведень. Я, по правді кажучи, бажаю, щоб термін "конструктивний" був зарезервований тільки за першою частиною, оскільки він видається найбільш відповідним чином застосовний до того погляду, що базовим поняттям математики є поняття побудови [порівняйте із Маховером] без подальшого уточнення, якого виду побудови повинні бути дозволені. Але цей термін був захоплений для вужчої концепції. Тому я називатиму концепцію, яку я хочу представити, "теоретико-побудовною". Як ви зараз побачите, я міг би назвати її і "теоретико-довідною" концепцією. На перший погляд, є два види концепції, що мається на увазі: побудови доведень деякого твердження і побудова об'єктів деякого типу. Проте я доведу з точки зору основ математики, що немає різниці між цими двома поняттями.Твердження можна розглядати як тип об'єкта, а саме тип його доведень. Навпаки, тип A можна розглядати як твердження, а саме твердження, доведення яких є об'єктами типу A. Тому твердження істинне саме в тому випадку, коли існує об'єкт типу A. Ототожнення тверджень із типами має дві сторони. Перша технічна і непроблематична. Якщо просто перекласти відношення твердження до доведення як відношення типу до об'єкта... правила доведення точно відповідають правилам побудови об'єктів відповідного типу. Тому кожне твердження, яке ми визнаємо таким, можна із точки зору теорії доведень тлумачити як тип. Інша сторона цього ототожнення потребує аргументів. Тому що вона тягне, що твердження детерміноване, коли воно детерміноване теоретико-довідно, тобто коли воно детерміноване *як* тип. *Із цього погляду, істина може означати тільки довідність.*"

Здається, що тут уривок курсивом вказує на *ідеалістичний* або принаймні *формалістський* характер тлумачення "твердження-як-типи". Але Тейт продовжує пояснювати:

> "Коли я кажу, що істина може означати тільки довідність, я не маю на увазі, що "A істинне" визначене, щоб означати "A довідне" для кожного

> типу A. "A істинне" просто означає, що A [*це приклад так званої теорії надлишковості істини*]. Адже сила ототожнення істини із довідністю є просто в тому, що єдиною ґарантією для стверджування A є доведення A."

Цікаво порівняти це із теоретико-топосним викладом істини. Тут є "об'єктивне" семантичне поняття істини на манер Тарського у локальних рамках (топосі) $\mathcal{E}$ разом із тим, що можна назвати "суб'єктивним" (хоча досконало строгим) поняттям довідності із локальної теорії множин T. Ці два поняття визначені досить по-різному, але завжди можна зробити так, щоб вони співпадали в тому розумінні, що *істина в $\mathcal{E}$ співпадає із довідністю з теорії $Th(\mathcal{E})$, детермінованої $\mathcal{E}$, і навпаки, довідність із T співпадає із істиною у мовному топосі $\mathcal{E}_T$, детермінованому* T. Тому, навіть хоча можна показати, що істина співпадає із довідністю, вона не є *визначена* так, щоб приводити обидві концепції до співпадіння. У цьому відношенні теоретико-топосний виклад істини, звичайно, не відрізняється від викладу "твердження-як-типи". Ці два поняття істини розрізнені радше тим фактом, що у рамках "твердження-як-типи", як каже Тейт, *єдиною ґарантією для стверджування A є доведення A*, натомість у теоретико-топосних рамках на додачу маємо "суб'єктивну" ґарантію доведення, *об'єктивну ґарантію істини в локальних рамках.* Саме ця остання риса, я думаю, надає теоретико-топосному викладу його "реалістичного" характеру.

Тейт визнає, що формалістичне ототожнення істини із довідністю, на якому ґрунтується вся концепція "твердження-як-типи", можна піддати сумніву.

> "Адже [як він каже] є багато тих, хто би доводив, що істина – це першочергове поняття, яке не можна схопити поняттям доведення. Для когось, хто дотримується цієї думки, ототожнення тверджень як типів, було би незадовільним. Адже було би неадекватно просто уточнити, як побудувати об'єкти різних типів A. Треба би було також пояснити умови, за яких A істинне (і пояснити в цих термінах, чому об'єкти типу A повинні вважатися доведеннями A)."

Концепція "твердження-як-типи" (яку скоротимо для зручності до ТЯТ) приводить до відповідності між логічними операторами і операціями на типах (або множинах). Для початку розглянемо два твердження/типи A і B. Що потрібно вимагати від доведення f імплікації $A \to B$? Просто що для будь-якого заданого доведення x для A доведення f повинно приводити до доведення B, тобто f повинно бути функцією із A в B. Іншими словами, твердження $A \to B$ – це просто тип функцій із A в B:

$$A \to B = B^A.$$

Подібним чином, все, чого треба вимагати від доведення c кон'юнкції $A \wedge B$ – це те, що воно повинно давати доведення x і y для A і B відповідно. Із теоретико-конструктивної точки зору $A \wedge B$ згідно з цим є просто типом $A \times B$ всіх пар (x, y) із x типу A (записуємо це як $x : A$) і $y : B$.

Доведення диз'юнкції $A \vee B$ є доведенням A або доведенням B разом із інформацією щодо того, що це є доведення A чи B. Тобто, якщо запровадити тип 2 із двома різними елементами 0 і 1, доведення $A \vee B$ можна ототожнити із парою (c, n), в якій c є доведенням A і n є 0 або c є доведенням B і n є 1. Це означає, що із теоретико-конструктивної точки зору $A \vee B$ є диз'юнктним об'єднанням $A + B$ A і B.

Істинне твердження τ можна ототожнити із одноелементним типом $1 = \{0\}$: отож 0 вважається єдиним доведенням τ. Хибне твердження $\perp$ приймається як твердження, якому зовсім бракує доведення: згідно із цим $\perp$ ототожнюється із порожньою множиною $\emptyset$. Заперечення $\neg A$ твердження A визначене як $A \to \perp$, тому стає тотожним із множиною $A^{\emptyset}$.

Як ми вже сказали, твердження A вважається істинним, якщо воно (тобто асоційований тип) має елемент, тобто якщо існує функція $1 \to A$. Згідно з цим закон виключеного третього для твердження A стає твердженням, що існує функція $1 \to A + A^{\emptyset}$.

Якщо a і b є об'єктами типу A, запровадимо твердження тотожності або тип $a =_A b$, яке виражає, що a і b є тотожними об'єктами типу A. Це твердження істинне, тобто асоційований тип має елемент, якщо і тільки якщо a і b є тотожними. У такому випадку $id(a)$ позначатиме об'єкт типу a.

У ТЯТ потрібно чітко розрізняти між твердженнями, які мають доведення, і судженнями, які не мають. Наприклад, $0 =_2 0$ є твердженням, натомість "0 є типу 2" є судженням. Радше ніж бути істинними або хибним, судження є стверджуване або беззмістовне.

У той час як 2^A не має дуже природної інтерпретації як твердження, це можна вважати типом всіх розв'язних множин об'єктів типу A. Для заданих $f : 2^A$ і $x : A$, якщо ми визначимо належність так:

$$x \in_A f \quad \text{я.т.я.} \quad fx = 1,$$

то легко зрозуміти, що $x \in_A f \vee \neg x \in_A f$.

Щоб мати справу із кванторами, потрібні операції, визначені на сім'ях типів, тобто типів $\varphi(x)$, що залежать від об'єктів x деякого типу A. За аналогією із випадком $A \to B$ доведення f твердження $\forall x : A\ \varphi(x)$, тобто об'єкта типу $\forall x : A\ \varphi(x)$, повинно асоціювати із кожним $x : A$ доведення $\varphi(x)$. Тому f є просто функцією із областю визначення A такою, що для кожного $x : A$ fx є типу $\varphi(x)$. Тобто $\forall x : A\ \varphi(x)$ є декартовим добутком $\prod x : A\ \varphi(x)$. Використовуємо λ-позначення у написанні f як $\lambda x f x$.

Доведення твердження $\exists x : A\ \varphi(x)$, тобто об'єкта типу $\exists x : A\ \varphi(x)$, повинно детермінувати об'єкт $x : A$ і доведення y $\varphi(x)$ і навпаки. Тому доведення цього твердження є просто парою (x, y) із $x : A$ і $y : \varphi(x)$. Тому $\exists x : A\ \varphi(x)$ є диз'юнктним об'єднанням $\coprod x : A \varphi(x)$, де φ є постійною функцією із значенням B.

Запровадимо функції σ, π, π' типів $\forall x : A\ (\varphi(x) \to \exists x : A\ \varphi(x))$, $\exists x : A\ \varphi(x) \to A$ і $\forall y : (\exists x \varphi(x)).\varphi(\pi(y))$ наступним чином. Якщо $b : A$ і $c : \varphi(b)$, то σbc є (b, c). Якщо $d : \exists x : A \varphi(x)$, то d є вигляду (b, c) і в такому випадку $\pi(d) = b$ і $\pi'(d) = c$. Це приводить до рівнянь

$$\pi(\sigma bc) = b \quad \pi'(\sigma bc) = c \quad \sigma(\pi d)(\pi' d) = d.$$

Аксіома вибору (АВ) – це твердження

$$\forall x : A\ \exists y : B\ \varphi(x, y) \to \exists x : B^A\ \forall x : A\ \varphi(x, fx).$$

АВ істинна в ТЯТ, як показує наступне доведення. Нехай u – доведення умови $\forall x : A\ \exists y : B\, \varphi(x, y)$. Тоді для будь-якого $x : A\ \ \pi(ux)$ є типу B і $\pi'(ux)$ є доведенням $\varphi(x, \pi ux)$. Тому $s(u) = \lambda x.\pi(ux)$ є типу B^A і $t(u) = \lambda x.\pi'(ux)$ є доведенням $\forall x : A\, \varphi(x, s(u)x)$. Згідно з цим $\lambda u.\sigma s(u)t(u)$ є доведенням $\forall x : A\ \exists y : B\, \varphi(x, y) \to \exists x : B^A\, \forall x : A\, \varphi(x, fx)$.

У звичайній теорії множин це доведення встановлює ізоморфізм множин $\prod x : A \coprod y : B\, \varphi(x, y)$ і $\coprod f : B^A \prod x : A\, \varphi(x, fx)$, але не правильність аксіоми вибору. У теорії множин АВ не подається цим ізоморфізмом, а радше еквівалентна до рівності, у якій $\prod$ замінено на $\cap$ і $\coprod$ на $\cup$:

$$\bigcap_{x\in A} \bigcup_{y\in B} \varphi(x, y) = \bigcup_{f\in B^A} \bigcap_{x\in A} \varphi(x, fx).$$

У той час як в ТЯТ АВ не має "невдалих" логічних наслідків, в інтуїціоністській теорії множин (ІТМ) це далеко не так, адже там АВ тягне закон виключеного третього. Варто повторити доведення в початковій формі, що належить Дьяконеску:

Припустимо, що задана функція вибору f на степеневій множині множини $2 = \{0, 1\}$. Нехай α – будь-яке твердження і визначимо

$$U = \{x \in 2 : x = 0 \vee \alpha\}, \quad V = \{x \in 2 : x = 1 \vee \alpha\}.$$

Записуючи $a = fU$, $b = fV$, маємо $a \in U$, $b \in V$, тобто

$$(\#) \qquad [a = 0 \vee \alpha] \wedge [b = 1 \vee \alpha].$$

Звідси випливає, що

$$[a = 0 \wedge b = 1] \vee \alpha,$$

звідки

$$(*) \qquad a \neq b \vee \alpha.$$

Тепер, зрозуміло, що

$$\alpha \implies U = V = 2 \implies a = b,$$

звідки

$$a \neq b \implies \neg\alpha.$$

Але це і $(*)$ разом тягнуть $\neg\alpha \vee \alpha$.

[Зауваження: Фактично нам потрібно припустити тільки, що функція вибору визначена на множині $\{U, V\}$. Цю форму доведення можна відтворити в інтуїціоністському ε-численні із екстенсіональними ε-членами, показуючи таким чином, що воно фактично є класичним.]

Приймаючи до уваги, що АВ виконується в ТЯТ, цікаво запитати, чому ці аргументи не можна відтворити там? Тепер перший аргумент, здається, залежить від двох припущень, по-перше, що множини U і V є правильно визначені і задовольняють звичайні умови "усувності", що приводять до стверджуваності $(\#)$ вище. І, по-друге, що функція вибору f задовольняє екстенсіональність у тому розумінні, що якщо U і V є екстенсіонально тотожні, то $fU = fV$. Здається, саме так і є, що коли типи підмножин додані до ТЯТ (у системі Мартіна-Льофа), то умова "усувності"

$$(!) \qquad a \in \{x : \varphi(x)\} \rightarrow \varphi(a)$$

не виконується. Щодо другого аргумента, він, здається, не виконується по суті тому, що в ТЯТ значення функції, визначеної на (під)множині X залежить не тільки від змінного члена x в X, але також від *доведення* того, що x фактично знаходиться в X. Отож, припустимо, що задані типи A, B і підмножина $X = \{x : \beta(x)\}$ в A. Пишемо $p \vdash \alpha$ замість "p є доведенням α". Тоді в ТЯТ із $\forall x : A\, [\beta(x) \rightarrow \exists y : B\, \varphi(x, y)]$ можемо виснувати існування функції f: $\{(x, p) : p \vdash \beta(x)\} \rightarrow B$, для якої $\forall x \forall p [p \vdash \beta(x) \rightarrow \varphi(x, f(x, p))]$. Тепер повернемося до доведення Дьяконеску. Тут A є $P2$, степенева множина 2 (припускаючи, що присутня), $\beta(x)$ є $\exists x.\, x \in X$ (X – змінна типу $P2$), B є 2 і $\varphi(X, y)$ є $y \in X$. Тепер для заданого твердження α визначимо підмножини U і V як раніше. Конструктивно єдиним доведенням $\exists x.\, x \in U$ має бути виставлення члена U, а оскільки невідомо, чи α істинне, єдиним виставлюваним членом U є 0. Так само єдиним виставлюваним членом V є 1. Згідно з цим, записуючи $a = f(U, 0)$ і $b = f(V, 1)$, виводимо (*), як і раніше (припускаючи усувність підмножин). Але тепер, в той час як $\alpha \rightarrow U = V$, не можемо виснувати, що $U = V \rightarrow a = b$, блокуючи так виведення $\alpha \rightarrow a = b$.

Тому якщо екстенсіональні степеневі множини належно додані до ТЯТ, то логіка там стає класичною.

Навіть в ІТМ АВ *для одноелементних множин* має невдалий логічний наслідок, а саме, неконструктивний $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)$. Тут під АВ для одноелементних множин ми розуміємо, що для будь-якої множини U існує функція f із областю $\{U\}$ така, що якщо $\exists x\ x \in U$, то $f(U) \in U$ – така f називається *функцією вибору* на $\{U\}$.

Тепер нехай α і β – будь-які твердження і визначимо

$$U = \{x \in 2 : (x = 0 \wedge \alpha) \vee (x = 1 \wedge \beta)\}.$$

Нехай f – функція вибору на $\{U\}$, і запишемо $a = f(U)$. Зрозуміло, $\exists x\ x \in U \leftrightarrow \alpha \vee \beta$, так що

$$(*) \qquad \alpha \vee \beta \rightarrow (a = 0 \wedge \alpha) \vee (a = 1 \wedge \beta).$$

Оскільки $a \in 2$, то маємо $a = 0 \vee a = 1$, що, поєднане із (*), дає

$$(a = 0 \vee a = 1) \wedge [\alpha \vee \beta \rightarrow (a = 0 \wedge \alpha) \vee (a = 1 \wedge \beta)],$$

звідки

$$\begin{gathered}[a = 0 \wedge [\alpha \vee \beta \rightarrow (a = 0 \wedge \alpha) \vee (a = 1 \wedge \beta)] \vee \\ (a = 1 \wedge [\alpha \vee \beta \rightarrow (a = 0 \wedge \alpha) \vee (a = 1 \wedge \beta)],\end{gathered}$$

що тягне, використовуючи $0 \neq 1$,

$$[\alpha \vee \beta \rightarrow \alpha] \vee [\alpha \vee \beta \rightarrow \beta],$$

звідки

$$[\beta \to \alpha] \vee [\alpha \to \beta],$$

що й стверджувалося.

Це доведення не виконується в ТЯТ із підмножинами із-за неусувності виразів підмножин, тобто невиконання (!) вище.

[Зауваження: останнє доведення можна відтворити в інтуїціоністському ε-численні, показуючи таким чином, що там $[\alpha \to \beta] \vee [\beta \to \alpha]$ вивідна.]

Що саме робить із ТЯТ або конструктивної теорії типів "основу" для математики? По-перше, потрібно зазначити її радикально "внутрішній" характер, за словами Ґеделя (вперше сказаними у зв'язку із теорією Рассела "ніяких класів") "тенденція виключити припущення про існування об'єктів зовні 'даних' і замінити їх побудовами на базі цих даних". Тут під "даними" Ґедель мав на увазі логіку без припущення існування класів і об'єктів. У випадках КТТ або ТЯТ "дані" містять *вирази, правила, судження, твердження, доведення/побудови, множини/типи, види/категорії.* А замість логічних операцій є операції на *типах*: диз'юнктне об'єднання, декартів добуток. Це *формальні* поняття.

У КТТ непредикативність уникнута точним дотриманням принципу, що універсально квантифіковані змінні повинні пробігати тільки попередньо визначені множини. У той час, як він має позитивні риси, наприклад, щоб дати змогу аксіомі вибору стати вивідною, це накладає також строгі обмеження на можливі розширення системи. Наприклад, якщо спробувати додати до КТТ степеневі множини або навіть степеневу множину 1, то закон виключеного третього стає вивідним. А трактування видів тверджень як множин, іншими словами, дозволяючи квантифікацію другого порядку, приводить до прямої несумісності.

Теорія множин і КТТ мають одну спільну річ, яка відрізняє їх від теорії топосів: вони є, принаймні за наміром, *моністичні.* Одна претендує на кристалізацію істин, що виконуються в єдиному універсумі множин; інша дає вираз за припущенням єдиному тілу принципів, що лежать в основі інтуїціоністської концепції математики. Той факт, що обидві рамки допускають розширення (наприклад, теорія множин додаванням аксіом великих кардиналів, а КТТ – принципів підмножин і подібних – порівняйте із продовженням брауерівського інтуїціонізму включенням творчого суб'єкта) – не змінює їхньої суттєвої моністичності. У своєму монізмі обидві мають подібність до теорії чисел. На противагу теорія топосів нагадує алгебру в тому, що ніколи не планувалося, щоб її центральна концепція мала єдине посилання. Насправді концепція топоса була задумана, щоб схопити спільні риси широкого спектру категорій, що виникають у топології і алгебраїчній геометрії – категорії пучків.

Було сказано, що КТТ не є теорією для щоденного практичного використання, а для розуміння основ конструктивної математики. Фактично більшість рушійної сили за розвитком КТТ походить із комп'ютерної науки: насправді КТТ сама є функціональною мовою програмування. Тонкість і складність КТТ зробили важким розвиток дійсної математики у ній: за словами Г.Самбіна і С.Валентіні,

> "Наш досвід у розвитку частин нинішньої математики всередині теорії типів привів нас до віри, що ортодоксальна теорія типів не є підходячою, тому що її контороль за інформацією занадто строгий для нашої

> мети. Фактично повний аналітичний характер теорії типів стає тягарем, коли маємо справу із синтетичними методами математики, які забувають або вважають доведеними більшість подробиць. Це, на нашу думку, могло би бути причиною, чому теорія типів притягнула дотепер більше інтересу серед логіків і комп'ютерників як основоположна теорія..."

Вони продовжують показувати, як, дещо "лібералізуючи" теорію типів, стає можливо розвивати там загальну топологію природним способом. Мотивація, що лежить в основі такого розвитку, за їхніми словами, така: "замостити прогалину між звичайною математикою і комп'ютерними мовами".

Інший спосіб зробити теорію типів доступнішою практикуючим математикам в уподібненні її до теорії *множин*. Це привело до розвитку, головно зусиллями П.Ачела, предикативної форми інтуїціоністської теорії множин, що називається *конструктивною теорією множин*. Конструктивна теорія множин показує реальну перспективу, як система, що поєднує точність теорії типів із "дружнім" (для користувача) характером теорії множин.

ПОШУКИ КОНТИНУУМУ

§1. Проблема континууму і дійсні числа

Проблему континууму на весь зріст поставив перед філософами і математиками ще Зенон з Елеї. У відомих апоріях "Апорія міри", "Дихотомія", "Ахіллес і черепаха", "Стріла", "Стадій" та інших описується суперечливість поняття множини та деяких властивостей руху.

"У школі елеатів вперше предметом логічного мислення стала проблема нескінченності. У цьому сенсі філософія елеатів являє собою важливу віху в історії наукового мислення. Деякі дослідники вважають, що вчення елеатів кладе початок науковому знанню у строгому сенсі слова. Така точка зору має сенс; теоретичне природознавство неможливе без математики, а сама математика настільки тісно пов'язана з поняттям нескінченності, що нерідко її визначають, як науку про нескінченне. Справді, старе, що йде через століття, визначення математики (точніше, математичного аналізу, що розуміють як основу і фундамент математики,) як науки про нескінченне, розділяють і багато сучасних математиків. Але вперше проблема нескінченності стала предметом обговорення саме в школі елеатів. Зенон розкрив суперечності, в які впадає мислення при спробі осягнути нескінченне в поняттях. Його апорії – це перші парадокси, що виникли у зв'язку з поняттям нескінченного." ([Г]) Зазначимо лише, що елеати вперше поставили перед наукою питання, яке є одним із найважливіших методологічних питань і на сьогодні: як потрібно мислити континуум – дискретним чи подільним до нескінченності? Висновки Зенона парадоксальні у тому сенсі, що, будемо ми мислити континуум подільним до нескінченності, або ж, навпаки, як такий, що складається із неподільних моментів, ми не можемо без суперечності мислити рух. Спроби розв'язати задачу Зенона привели в античності до створення різних програм наукового дослідження – атомістичної Демокріта, перетвореної Платоном піфагорейської програми і програми Арістотеля.

Прийнято вважати, що такий і подібні парадокси долаються в сучасній математичній моделі неперервного руху. Суттєву роль при цьому відіграє виконання аксіоми Архімеда в полі дійсних чисел. Однак можна піддавати сумніву адекватність реальному рухові загальновживаної математичної моделі. Для дослідження концепції фізичних нескінченно малих великих величин побудовані теорії дійсних чисел, в яких ця аксіома не виконується.

Нагадаємо, яку відповідь на запитання "Що таке дійсне число?" дають підручники з математичного аналізу. Розгляд цього питання забезпечить мотивацію для визначення ширших числових систем. Ось деякі стандартні відповіді.

(1) Дійсне число – це нескінченний десятковий вираз, такий як

$$\sqrt{2} = 1,4142135623731\ldots,$$

що визначає $\sqrt{2}$ як суму нескінченного степеневого ряду

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \cdots.$$

(2) Дійсне число – це елемент повного впорядкованого поля. Тут "повне", що часто називається "дедекіндово повним", означає, що будь-яка непорожня множина з верхньою гранню мусить мати найменшу верхню грань. Будь-які два повні впорядковані поля ізоморфні, тому це поняття однозначно характеризує $\mathbb{R}$.

(3) Дійсне число – це *дедекіндовий переріз* у множині $\mathbb{Q}$ раціональних чисел: розбиття $\mathbb{Q}$ у пару (L, U) непорожніх неперетинних підмножин, де кожний елемент L менший від кожного елемента U і L не має найбільшого елемента. Отож $\sqrt{2}$ можна ідентифікувати з перерізом

$$L = \{q \in \mathbb{Q}: \; q^2 < 2 \vee q < 0\}, \quad U = \{q \in \mathbb{Q}: \; q^2 > 2 \wedge q > 0\}.$$

Множину всіх дедекіндових перерізів $\mathbb{Q}$ можна перетворити у повне впорядковане поле.

(4) Дійсне число – це клас еквівалентності послідовностей Коші раціональних чисел. Послідовність $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$ є послідовністю Коші, якщо її члени стають як завгодно близькими один до одного, коли рухатися вздовж послідовності, тобто

$$\lim_{n.m \to \infty} |r_n - r_m| = 0.$$

Отож, $\sqrt{2}$ є границею раціональної послідовності Коші

$$1, \quad 1,4, \quad 1,41, \quad 1,414, \quad 1,4142, \quad 1,41421, \ldots,$$

так само як і границею будь-якої з підпослідовностей цієї послідовності і, крім цього, інших раціональних послідовностей.

Дві послідовності Коші $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$ і $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ *еквівалентні*, якщо їхні члени наближаються один до одного як завгодно близько:

$$\lim_{n \to \infty} |r_n - s_n| = 0.$$

Це визначає відношення еквівалентності на множині раціональнозначних послідовностей Коші і одержана множина класів еквівалентності утворює повне впорядковане поле. Будь-які дві еквівалентні послідовності Коші матимуть одну границю і тому зображують одне дійсне число. Наприклад, $\sqrt{2}$ відповідає класові еквівалентності наведеної вище послідовності.

Відповідь (2) забезпечує основу для *аксіоматичного* чи *описового* підходу до аналізу $\mathbb{R}$. Об'єкт вивчення просто описується як повне впорядковане поле, оскільки всі його властивості висновуються з цього факту. Аксіоми для повного впорядкованого поля перелічені і все випливає з них. Це є дотепер найулюбленішим підходом у вступних підручниках з дійсного аналізу.

При *конструктивному* підході беремо як задану тільки раціональну числову систему і далі явно будуємо $\mathbb{R}$. Існує принаймні два шляхи зробити це – завдяки Дедекіндові (відповідь (3)) і Канторові (відповідь (4)).

*

Погляд, що континуум можна скласти або синтезувати із точок, часто заперечувався, як свідчать такі цитати:

Арістотель: "... ніякий континуум не можна утворити з неподільних, наприклад, пряму з точок, за умови, що пряма неперервна і точки неподільні".

Лейбніц: "Точка не може бути складовою частиною прямої".

Кант: "Простір і час є неперервними кількостями ... точки і моменти – просто позиції ... і з чистих позицій, що вважаються складниками, які задані до простору і часу, ні простір, ні час не можна побудувати".

Вейль: "Точні часові або просторові точки не є остаточними, основоположними, атомними елементами тривалості або протяжності, заданими нам у досвіді".

Брауер: "Лінійний континуум не вичерпується вставлянням нових одиниць і тому про нього ніколи не можна думати, як про просту колекцію одиниць".

Рене Том: "... справжній континуум не має точок".

Цікаві також висловлювання Веронезе, Брентано, Пірса (див. [B3]), які різко не погоджувалися із спробами математиків (Дедекінда, Кантора та ін.) арифметизувати континуум. Виявляється, є певна подібність між сприйняттям неперервної прямої за Пірсом і системою сюрреальних чисел Д.Конвея, яку побачимо нижче.

Ці погляди вражаюче контрастують із загальноприйнятим теоретико-множинним викладенням математики, згідно з яким всі математичні сутності є дискретними: там, зокрема, немає "справжнього" континууму. Проте, на жаль, навіть у деяких підручниках з математичного аналізу можна знайти намагання *довести* "неперервність" або "повноту" множини дійсних чисел. Інші – більш "строгі", просто обходять цю проблему, підтверджуючи слова Е.Нельсона. Цікаво зазначити, що сам Кантор різко заперечував можливість існування нових елементів між звичайними дійсними числами: "Нескінченно малі – це холерні бацили математики".

Детальніше про розвиток уявлень про співвідношення між неперервним, дискретним та нескінченно малим див. §2.

*

Розглянемо ще одну спокусливу відповідь на запитання "що таке дійсне число?" - а саме, що дійсне число є точкою на числовій прямій:

Інтуїтивна геометрична ідея прямої дуже давня, значно старша від поняття множини точок, не кажучи вже про нескінченні множини. Ототожнення прямої з множиною точок, що лежать на ній, є поглядом, що належить до нинішніх часів. Для Евкліда пряма лінія була просто "довжиною без ширини", а його діаграми і доведення містили лінії зі скінченним числом точок на них. Застосовуючи польові операції і беручи границі збіжних послідовностей, можна приписати точку кожному дійсному числу, але твердження, що це вичерпує всі точки на прямій, є просто твердженням. Можна було би намагатися виправдати його, звертаючись до такого принципу, який приписують Евдоксові і Архімедові, що будь-які дві величини є такі, що

меншу можна помножити так, щоб вона перевищила іншу.

Це тягне за собою, що для кожного дійсного числа r існує ціле $n > r$, і перешкоджає тому, щоб були нескінченно великі або малі числа в $\mathbb{R}$. Але тоді можна сказати, що принцип Евдокса-Архімеда є просто властивістю тих точок на прямій лінії, які відповідають "приписуваним" числам. Гіпердійсна точка зору (як побачимо нижче) така, що *геометрична* пряма здатна утримати значно багатшу і складнішу числову множину, ніж *дійсна* пряма. Насправді звичайні дійсні числа розподілені дискретно на гіпердійсній геометричній прямій.

§2. Неперервність і нескінченно малі

Звичайним значенням слова *неперервний* є "цілий", "нерозбитий" або "непорушений": отож неперервна сутність – *континуум* – не має "щілин", "пробілів". Ми звично припускаємо, що простір і час неперервні, а деякі філософи стверджували, що всі природні процеси відбуваються неперервно, свідченням чого є, наприклад, апофегма Лейбніца *природа не робить стрибків*. У математиці це слово вживають у тому самому загальному сенсі, але його треба було забезпечити все точнішими означеннями. Так, наприклад, у кінці 18-го столітті неперервність функції означала, що нескінченно малі зміни значення аргумента викликають нескінченно малі зміни значення функції. Із відмовою від нескінченно малих у 19-у столітті це означення було замінене таким, що використовує точнішу концепцію границі.

Традиційно "нескінченно мала кількість" – це така, що не необхідно співпадає з нулем і є у деякому сенсі меншою, ніж будь-яка скінченна кількість. Для інженерів нескінченно мала – це кількість така мала, що її квадратом і всіма вищими степенями можна знехтувати. У теорії границь термін "нескінченно мала" деколи застосовують до будь-якої послідовності, границею якої є нуль. *Нескінченно малу величину* можна розглядати як те, що залишається після того, як континуум було піддано вичерпному аналізу, іншими словами, як континуум, що "бачиться в малому". Саме в цьому сенсі неперервні криві деколи розглядали, як "складені" із нескінчено малих прямих ліній.

Нескінченно малі мають тривалу і яскраву історію. Вони з'явилися у математиці грецького філософа-атоміста Демокріта (приблизно 450 р. до н.е.), вигнані лише математиком Евдоксом (прибл. 350 р. до н.е.) у тому, що стало відомо, як офіційна "евклідова" математика. Одягнувшись у форму дещо незрозумілих неподільних, вони знову з'явилися у математиці пізніх середніх віків і пізніше зіграли важливу роль у розвитку числення. Їх сумнівний логічний статус призвів у 19-у столітті до їхнього вигнання і заміни концепцією границі. Однак у наступні роки концепція нескінченно малих була відновлена на строгій базі.

Неперервне, дискретне і нескінченно мале

Усі ми знайомі з ідеєю *неперервності*. Бути неперервним означає утворювати нерозбиту або непорушну цілість, подібно до океану чи неба. Неперервна сутність – *континуум* – не має "щілин". Протилежною до неперервності є *дискретність*: бути дискретним означає бути розділеним, окремим, подібно до розсипаних камінців на березі або листків на дереві. Неперервність має додаткове значення єдності, дискретність – множинності.

Хоча фундаментальною природою континууму є *нероздільність*, все-таки загалом (хоча не незмінно) дотримуються думки, що будь-який континуум допускає повторний або послідовний *поділ без границі*. Це означає, що процес поділу на все менші частини ніколи не закінчиться *неподільними* або *атомами* – тобто частинами, які, самі не маючи частин, не можна далі поділити. Коротше, континууми *подільні без границі* або *нескінченно подільні*. Отож, єдність континууму приховує потенційно нескінченну множинність. В античності це твердження зустрічало заперечення, що якщо б хтось виконав повністю, хоча би лише в уяві, процес поділу протяжної величини, такої як неперервна пряма, то величина звелася би до множини атомів – у цьому випадку безрозмірних точок – або навіть взагалі ні до чого. Але тоді, вважалося, не має значення, як багато таких точок там могло би бути, навіть нескінченно багато, їх не можна "зібрати знову", щоб утворити початкову величину, тому що, безсумнівно, сума безрозмірних елементів не матиме протяжності. Крім того, якщо насправді (як видається, неминуче) нескінченно багато точок залишається після поділу, то за Зеноном величину не можна вважати (скінченним) рухом, що приводить до очевидно абсурдного висновку, що нескінченно багатьох точок можна "доторкнутися" за скінченний час.

Такі труднощі супроводили народження у 5-у ст. до н.е. школи *атомізму*. Засновники цієї школи Левкіпп і Демокріт стверджували, що матерія, і загальніше, протяжність, не є нескінченно подільні. Не лише послідовний поділ матерії остаточно закінчився би атомами, тобто дискретними частинками, не здатними до подальшого поділу, але матерію *в дійсності* треба уявляти, як складену з таких атомів. Атакуючи нескінченну подільність, атомісти в той самий час твердили, що неперервне остаточно звідне до дискретного, чи на фізичному, чи на теоретичному, чи на сприйняттєвому рівні.

Остаточний тріумф атомістичної теорії у фізиці і хімії у 19-у столітті підготував ґрунт для того щоб ідея "атомізму", як вона застосовується принаймні до матерії, стала широковідомою: можна сказати, перефразовуючи відоме спостереження сера Вільяма Гаркура стосовно соціалістів його доби: "Ми всі тепер атомісти"[3]. Все ж тільки меншість філософів минулого підтримували ідею атомізму на метафізичному рівні – це факт, який може пояснити, чому аналогічна доктрина, що притримується неперервності, не має відомої назви: те, що визнається несвідомо, не вимагає ніякої назви. Пірс придумав термін *синехізм* (від грецького синехе, "неперервний") для своєї власної філософії, просякнутою ідеєю неперервності – у його сенсі "бути зв'язаним". Тут ми дотримуватимемося терміну Пірса і використовуватимемо його у сенсі, позбавленому пірсівських прихованих натяків, просто як протилежному до атомізму. Притримуватимемося терміну "дивізіонізм" щодо більш спеціальної доктрини, що континууми нескінченно подільні.

Тісно пов'язаною з концепцією континууму є концепція *нескінченно малого. Нескінченно мала величина* дещо туманно сприймалася як континуум, "що бачиться в малому", "остаточна частина" континууму. У чомусь подібно до того, як дискретна сутність зроблена з її індивідуальних одиниць, її "неподільних", так вважалося, що континуум "складений" з нескінченно малих величин – його остаточних частин. (Саме у такому сенсі, наприклад, математики 17-го століття вважали, що неперервні криві складені з нескінченно малих прямих ліній.) Тепер "зв'язність" континууму тягне, що кожна з його (зв'язаних) частин також є континуумом, і, згідно з цим, подільна. Оскільки точки неподільні, з цього випливає, що ніяка точка не може бути частиною континууму. Нескінченно малі величини, як частини континуумів, не можуть, з необхідністю, бути точками: вони є, словом, *неточкової форми.*

Величини звичайно вважають *протяжними (екстенсивними)* кількостями, подібно до маси або об'єму, які визначені над протяжними областями простору. На

[3]Посилання на літературу у цьому параграфі див. у [B4]

відміну від цього, нескінченно малі величини тлумачили як *інтенсивні* величини, що нагадують локально визначені інтенсивні кількості такі як температура або густина. Ефектом "розподілу" або "з'єднання в ціле" інтенсивних кількостей над такою інтенсивною величиною є перетворення їх в нескінченно малу екстенсивну кількість: отож температура перетворена в нескінченно малу теплоту, а густина – в нескінченно малу масу. Коли континуум є слідом руху, асоційовані нескінченно малі/інтенсивні величини були ототожнені із *потенційними* величинами – сутностями, які, хоча і не володіють самі істинною величиною, володіють *тенденцією* породжувати рух через рух, проявляючи "ставання" на відміну від "буття".

Нескінченно мале *число* – це таке, яке, хоча і не співпадає з нулем, є в деякому розумінні менше, ніж будь-яке скінченне число. Це розуміння часто вважали невиконанням *принципу Архімеда*, який зводиться до того, що нескінченно мале число – це таке, що не має значення, як багато разів воно додане до себе, результат залишатиметься меншим, ніж будь-яке скінченне число. У практичному трактуванні диференціального числення інженерами нескінченно мале – це число таке мале, що його квадратом і всіма вищими степенями можна знехтувати. У теорії границь термін "нескінченно мала" деколи застосовують до будь-якої послідовності, границею якої є нуль.

Концепція *неподільного* тісно пов'язана з концепцією нескінченно малих, але їх треба відрізняти. Неподільне є, за означенням, щось, що не можна поділити, що звичайно розуміють як таке, що не має власних частин. Тепер безчастинність або неподільна сутність не необхідно має бути нескінченно малою: душі, індивідуальні свідомості або лейбніцеві монади всі, ймовірно, не мають частин, але, певно, не є нескінченно малими. Але вони мають спільну рису бути непродовжуваними; протяжні сутності такі як лінії, поверхні і об'єми виявляються значно багатшим джерелом неподільних. Справді, якщо би процес поділу таких сутностей повинен був закінчитися, чого притримувалися атомісти, це необхідно закінчилось би неподільними якісно різної природи. У випадку прямої лінії такі неподільні, правдоподібно, були би точками; у випадку круга – прямими відрізками; а у випадку циліндра, поділеного перерізами, паралельними до його бази, – кругами. У кожному випадку неподільне, про яке йдеться, є нескінченно малим у тому сенсі, що *володіє виміром, який на одиницю менший, ніж вимір фігури, з якої воно породжене.* У 16-у і 17-у століттях неподільні у такому сенсі використовували при обчисленні площ та об'ємів криволінійних фігур, поверхню та об'єм уявляли як колекцію або суму лінійних або плоских неподільних відповідно.

Концепція нескінченно малого була оточена суперечкою від самого її початку. Ця ідея з'явилася вперше у математиці грецького філософа-атоміста Демокріта приблизно у 450 р. до н.е. і була вигнана приблизно у 350 р. до н.е. Евдоксом у тому, що стало відомо як "евклідова" математика. Ми зазначили їх нову появу, як неподільних, у шістнадцятому і сімнадцятому століттях: у цій формі вони систематично застосовувались Кеплером, учнем Галілея Кавальєрі, сім'єю Бернуллі і низкою інших математиків. Під виглядом оманливо названих "лінієлетів" і "часолетів" нескінченно малі зіграли суттєву роль у методі знаходження дотичних обчисленням Барроу, що з'явився у його *Lectiones Geometricae* (1670р.). Як "зникаючі кількості" нескінченно малі були засобом (хоча пізніше й покинутим) у розвитку Ньютоном числення і як "неприписувані кількості" у Лейбніца. Маркіз Лопіталь, який у 1696 р. опублікував перший трактат про диференціальне числення (під назвою *Аналіз нескінченно малих для дослідження кривих ліній*) звертався до цієї концепції, постулюючи, що "криву лінію можна розглядати, як зроблену з нескінченно малих прямолінійних відрізків" і що "можна вважати рівними дві величини, що відрізняються на нескінченно малу кількість".

Хоч якою корисною вона могла би бути на практиці, концепція нескінченно малих ледве протистояла логічному критичному аналізу. Висміяні Берклі у 18-у столітті як "привиди померлих кількостей", у 19-у прокляті Кантором як "холерні бацили", що заражають математику, і в 20-у столітті відверто засуджені Бертраном Расселом як "не необхідні, помилкові і самосуперечливі", ці корисні, але логічно сумнівні кількості, як вважалося, були остаточно витіснені в основах аналізу концепцією границі, яка набрала строгої і завершальної форми у кінці 19-го століття. На початок 20-го століття концепція нескінченно малої, принаймні в аналізі, стала віртуальною неконцепцією.

Все ж опала нескінченно малих не досягла мети у їх викоріненні; вони, радше, перейшли у підземелля. Наприклад, фізики та інженери ніколи не відмовлялись від їх використання як евристичного засобу для висновування правильних результатів у застосуванях числення до фізичних проблем. Диференціальні геометри висоти Лі або Картана покладалися на їх використання при формулюванні концепцій, які пізніше клалися на "строгу" опору. І в певному технічному сенсі вони жили у дослідженнях неархімедових полів алгебраїстами.

Нова фаза у довгому змаганні між неперервним і дискретним відкрилася у минулі десятиліття із переобґрунтуванням концепції нескінченно малого на твердій базі. Це було досягнуто двома суттєво різними способами, один забезпечив строге формулювання ідеї *числа*, а інший – нескінченно малої *величини*.

По-перше, у шістдесятих роках 20-го століття Абрахам Робінсон (1918-1974), використовуючи методи математичної логіки, створив *нестандартний аналіз* – продовження математичного аналізу, що втілює "нескінченно великі" і "нескінченно малі" числа, у якому звичайні закони арифметики дійсних чисел продовжують виконуватися – ця ідея, по суті, походить від Лейбніца. Тут під нескінченно великим числом розуміють число, яке перевищує кожне додатне ціле; оберненим до будь-якого з них є нескінченно мале в тому сенсі, що будучи ненульовим, є меншим, ніж кожний додатний дріб $1/n$. Корисність нестандартного аналізу походить із того факту, що в ньому кожне твердження звичайного аналізу, яке містить границі, має стислий і дуже інтуїтивний переклад на мову нескінченно малих.

Другий розвиток у відновленні нескінченно малих мав місце у сімдесятих роках із появою *синтетичної диференціальної геометрії*, відомої також як *гладкий інфінітезімальний аналіз*. Базований на ідеях американського математика Лоуера, із застосуванням методів теорії категорій, гладкий інфінітезімальний аналіз забезпечує образ світу, в якому неперервне є автономним поняттям, що не пояснюється в термінах дискретного. Він забезпечує строгі рамки для математичного аналізу, в якому кожна функція між просторами є гладкою (тобто диференційовною довільне число разів, і тому, зокрема, неперервною) і в якому використання границь у визначенні основних понять числення замінене *нільпотентними нескінченно малими*, тобто кількостями такими малими (але, фактично, не нулем), що деякий степінь, найкорисніше квадрат, перетворюється в нуль. Гладкий інфінітезімальний аналіз втілює концепцію інтенсивної величини у вигляді *нескінченно малих дотичних векторів до кривих.* Дотичний вектор до кривої у точці p на ній є коротким прямим відрізком I, що проходить через точку і вказує вздовж кривої. Фактично можна взяти I як нескінченно малу *частину* кривої. Криві у гладкому інфінітезімальному аналізі є "локально прямими" і згідно з цим їх можна уявляти "складеними" з нескінченно малих прямих ліній у сенсі Лопіталя або "породженими" нескінченно малим дотичним вектором.

Розвиток нестандартного і гладкого інфінітезімального аналізу вдихнув нове життя в концепцію нескінченно малих і, особливо у зв'язку із гладким інфінітезімальним аналізом, забезпечив нові погляди – проникнення в природу континууму.

Континуум і нескінченно малі в античний період

Протилежність неперервності та дискретності відігравала значну роль в античній грецькій філософії. Це, ймовірно, виникло із ще фундаментальнішого питання щодо одного і багато – антитези, яка лежала в серці грецької думки. Грецькі дебати про неперервне і дискретне, здається, були запалені зусиллями елеатичних філософів таких як Парменід (прибл. 515 р. до н.е.) та Зенон (прибл. 460 р. до н.е.) із встановлення їхньої доктрини абсолютного монізму. Вони зосередилися на тому, щоб показати, що подільність буття на частини приводить до суперечності, вимушуючи цим висновок, що очевидно різний світ є нерухомою, незмінною єдністю. У *Шляху істини* Парменід стверджує, що буття *однорідне* і *неперервне.* Проте, стверджуючи неперервність, Парменід не більше ніж підкреслює його суттєву єдність. Здається, Парменід стверджує, що буття є більше ніж просто неперервним – тобто фактично єдиним цілим, насправді *неподільним цілим.* Єдиним парменідівським існуючим є континуум без частин, відразу континуум і атом. Якщо Парменід був синехістом, його абсолютний монізм запобіг, щоб він у той самий час був дивізіоністом. На підтримку доктрини Парменіда про незмінність Зенон сформулював знамениті парадокси руху. Парадокси *Дихотомія* та *Ахіллес* явно спираються на подільність без границі простору і часу.

Доктрина *атомізму*, яка, здається, виникла як спроба втечі від елеатичної дилеми, була найперше і насамперед фізичною теорією. Її сформулювали Левкіпп (бл. 440 р. до н.е.) і Демокріт (нар. 460-457 до н.е.), котрі стверджували, що матерія не є неподільна без границі, але складена з неподільних, твердих, однорідних, просторово протяжних частинок, всі нижче рівня видимості.

Арістотель (384-322 до н.е.) кинув виклик атомізму, він був першим, хто взявся за систематичний аналіз неперервності та дискретності. Радикальний синехіст, він стверджував, що фізична реальність є неперервною заповненістю, і що структура континууму, спільна для простору, часу і руху, незвідна до чого-небудь іншого. Його відповідь на елеатичну проблему полягала в тому, що неперервні величини потенційно подільні до нескінченності, у тому сенсі, що їх можна поділити *будь-де*, хоча їх не можна поділити *всюди* у той самий час. Арістотель ототожнює неперервність і дискретність як атрибути, що застосовуються до категорії кількості. Як приклади неперервних кількостей, або *континуумів*, він пропонує прямі, площини, тверді тіла, протяжності, рух, час і простір; серед дискретних кількостей він перелічує число і мову. Він також уклав означення низки термінів, включно із неперервністю. Насправді Арістотель визначає неперервність радше як *відношення* між сутностями, ніж атрибут, що належить до єдиної сутності; тобто він не надає явного означення поняття *континууму*. Він зауважує, що єдине неперервне ціле можна ввести в існування, "склеюючи разом" дві речі, які входять в контакт, що підказує, що неперервність цілого повинна виникати із способу, яким його *частини* "з'єднуються". Згідно з цим для Арістотеля кількості такі як прямі і площини, простір і час неперервні силою того факту, шо їх складові частини з'єднуються разом у деякій спільній межі. На відміну від цього, *ніякі* складові частини дискретної кількості не можуть володіти спільною межею. Одною з центральних тез, що Арістотель намагається захистити, є незвідність континууму до дискретності – що континуум не можна "скласти" з неподільних або атомів, частин, яких самих далі не можна поділити. Арістотель деколи визнає *нескінченну подільність* – властивість бути подільним на частини, які самі можна ділити далі, процес ніколи не закінчується неподільним – як наслідок неперервності, як він характеризує це поняття. Проте у деяких випадках він приймає властивість нескінченної подільності як таку, що *визначає* неперервність. Саме це означення неперервності фігурує у доведенні Арістотелем того, що стало відомо як *теза про ізоморфізм*, котра стверджує, що або величина, час і рух всі є неперервними, або вони всі дискретні. Питання, чи величина вічно подільна на менші одиниці чи подільна тільки до деякої атомної величини, приводить до *дилеми про подільність* – трудність, з якою Арістотель мусів зіткнутися у зв'язку із його аналізом континууму. У першому або *нігілістичному* підході дилеми доводять, що якщо би величина була всюди подільною, то процес виконання цього поділу повністю звів би величину до безрозмірних точок або, можливо, навіть ні до чого. Другий, *атомістичний* підхід, починає з припущення, що величина не є всюди подільною, і приводить до так само неприйнятного висновку (для Арістотеля, принаймні), що неподільні величини мусять існувати.

Як радикальний матеріаліст, Епікур (341– 271 рр. до н.е.) не міг сприйняти поняття потенціальности, на яке спиралася теорія Арістотеля, і тому був підштовхнутий до атомізму в понятійному і фізичному сенсах. Подібно до Левкіппа і Демокріта Епікур відчував необхідним постулювати існування фізичних атомів, але щоб уникнути арістотелевої критики, він запропонував, що вони самі не повинні бути понятійно неподільними, але повинні *містити* понятійно неподільні частини. Арістотель показав, що неперервну величину не можна скласти з *точок*, тобто неподільних частин, у яких немає протяжності, але він не показав, що неподільна одиниця мусить обов'язково бути без протяжності. Епікур прийняв аргумент Арістотеля, що континуум не можна скласти з таких неподільних, вважаючи неподільні безчастинними одиницями величини, що володіє протяжністю.

На противагу атомістам стоїчні філософи Зенон з Цітіона (прибл. 250 р. до н.е.) та Хрізіпп (280-206 рр. до н.е.) притримувались арістотелівської позиції, що простір, час, матерія і рух є неперервними. І подібно до Арістотеля вони явно відкидали будь-яку можливість існування порожнечі в космосі. Космос проникнутий неперервною невидимою речовиною, яку вони називали *пневмою* (по-грецьки "дихання"). Цю пневму – яку розглядали як певного сорту синтез повітря і вогню, двох із чотирьох основних елементів, а іншими були земля і вода – сприймали як гнучке середовище, через яке поштовхи передаються хвильовим рухом. Усі фізичні події розглядали як зв'язані через розтяжні сили у пневмі, а про саму матерію дотримувались думки, що її якості виводяться із "зв'язування" властивостей пневми, яку вона містить.

Континуум і нескінченно малі у Середньовіччі, Відродженні і ранньому сучасному періоді

Схоластичні філософи середньовічної Європи у полоні величезного авторитету Арістотеля у більшості приєдналися в тій чи іншій формі до тези, доведеної з великою ефективністю Вчителем у книзі VI *Фізики*, що континууми не можуть складатися з неподільних. З другого боку, визнана нескінченність Бога схоластичної теології, що йшла наперекір тезі Арістотеля, що нескінченне існує тільки у потенційному сенсі, підбадьорила певних вчених зробити припущення, що актуальну нескінченність можна знайти навіть зовні Божества, наприклад у зібранні точок на неперервній прямій. Декілька вчених того часу, наприклад Генрі Гарклай (1274-1317 рр.) і Нікола Отрекур (1300-69) йшли слідом за Епікуром, притримуючись думки, що атомізм прийнятний, і спробували відкинути контраргументи Арістотеля.

Цей атомізм, що зароджувався, зустрів рішуче синехістське спростування, започатковане Джоном Дунсом Скоттом (1266-1308). У своєму аналізі проблеми "чи ангел може переміститися з місця на місце неперервним рухом" він пропонував пару чисто геометричних аргументів проти складання континууму з неподільних. Один із цих аргументів полягає в тому, що якщо би діагональ і сторона квадрата були би складені з точок, то вони не тільки були би співмірні, порушуючи книгу X Евкліда, а навіть були би й рівними. У другому два нерівні кола побудовані навколо спільного центра, і з припущення, що більше коло складене з точок, показано, що частина кута рівна цілому, всупереч евклідовій аксіомі V.

Вільям Оккам (1280-1349) вніс значний ступінь діалектичної тонкості до аналізу неперервності; це було предметом наукової дискусії. Для Оккама основною трудністю, представленою неперервним, є нескінченна подільність простору, і, загалом, будь-якого континууму. Трактування неперервності у першій книзі його *Quodlibet* у 1322-7 рр. спирається на ідею, що між будь-якими двома точками на прямій є третя – це, можливо, перше явне формулювання властивості *щільності* – і на відмінність між *континуумом*, частини якого утворюють єдність, і *контигуумом* поміщених бік у бік речей (contiguous=суміжний, що дотикається, що прилягає, близький, сусідній). Оккам визнає, що із властивості щільності випливає, що на як завгодно малих ділянках прямої мусить лежати нескінченно багато точок, але опирається висновку, що пряма, або насправді будь-який континуум, складається з точок. Зосереджений радше на тому, щоб визначити "сенс, в якому можна сказати, що пряма складається або зроблена з будь-чого", Оккам стверджує, що "ні ніяка частина прямої не є неподільною, ні будь-яка частина континууму". Хоча Оккам не стверджує, що пряма є фактично складена з точок, він мав проникливість, вражаючу її передбачливістю, що точкова, але все-таки неперервна пряма стає можливою, коли сприймається радше як щільний масив точок, ніж зібрання точок у суміжній послідовності.

Найчестолюбніша і найсистематичніша спроба спростування атомізму у 14-у столітті здійснена Томасом Брадвардайном (1290-1349). Мета його *Tractatus de*

Continuo (прибл. 1330р.) полягала у тому, щоб "довести, що думка, яка стверджує, що континууми складені з неподільних, є хибною". Це мало бути досягнуто висуванням "перших принципів" – споріднених із аксіомами і постулатами *Елементів* Евкліда – а потім доведенням того, що подальше припущення, що континуум складений з неподільних, приводить до безглуздя.

Погляди на континуум Ніколауса Кузанського (1401-64), прихильника актуально нескінченного, становлять значний інтерес. У *De Mente Idiotae* (1450 р.) він стверджував, що будь-який континуум, геометричний, сприймуваний чи фізичний, є подільним у двох розуміннях: одному – ідеальному, другому – справжньому. Ідеальний поділ "просувається до нескінченності"; справжній поділ закінчується атомами після скінченного числа кроків.

Реалістична концепція актуальної нескінченності Кузанського відображена в його квадратурі кола. Він вважає коло *нескінченнобічним* правильним багатокутником, тобто правильним багатокутником із нескінченним числом (нескінченно коротких) сторін. Ділячи його на відповідне нескінченне число трикутників, його площу, як і для будь-якого правильного багатокутника, можна обчислити як половину добутку апофеми (у цьому випадку тотожної з радіусом круга) і периметра. Ця ідея розгляду кривої як нескінченнобічного багатокутника була використана низкою мислителів, наприклад, Кеплером, Галілео і Лейбніцем.

У ранній сучасний період по Європі поширилось знання античної геометрії, особливо архімедової, і послабився арістотелівський тиск на мислення. Щодо проблеми континууму фокус зсунувся від метафізики до техніки, від проблеми "чим були неподільні або чи вони складали величини" до "нових чудес, які можна здійснювати із ними" за допомогою виникнення числення і математичного аналізу. Справді, відслідковування розвитку поняття континууму протягом цього періоду рівносильне до спостереження виникнення числення. Традиційно геометрія є областю математики, що має справу з неперервним, а арифметика (або алгебра) – з дискретним. Числення нескінченно малих, що набрало вигляду у 16-у і 17-у століттях, яке мало першочерговим предметом неперервну зміну, можна розглядати як певний вид синтезу неперервного і дискретного, із нескінченно малим замощуванням щілини між ними. Поширене використання неподільних і нескінченно малих в аналізі неперервної зміни математиками того часу свідчить про утвердження певного роду математичного атомізму, який асоційований із численням. Отож, це радше нескінченно малі, ніж нескінченні, служили математичним "каменем для переходу" між неперервним і дискретним.

Йоганн Кеплер (1571-1630) часто використовував нескінченно малі у своїх обчисленнях. У книзі "Nova Stereometria" (1615 р.), написаній насправді як допомога в обчисленні об'ємів винних бочок, він розглядає криві як нескінченнобічні багатокутники, а тверді тіла – як зроблені з нескінченно тонких дисків. Такі використання узгоджувалися із звичайним використанням Кеплером нескінченно малих того самого виміру, що й фігури, які вони складають; проте він також у певних випадках використовував неподільні. Він говорив, наприклад, про конус, як складений з кругів, а в "Astronomia Nova" (1609 р.), де він ствердив свої знамениті закони планетарного руху, він вважає площу еліпса "сумою радіусів", проведених з фокуса.

Здається, що саме Кеплер вперше запровадив ідею, яка пізніше стала пануючою чим принципом геометрії – *неперервної зміни математичного об'єкта*, у цьому випадку геометричної фігури. У *Astronomiae pars Optica* (1604 р.) Кеплер зазначив, що конічні перерізи неперервно одержуються один з одного як за допомогою фокального руху, так і зміною кута січної площини з конусом.

Галілео Галілей (1564-1642) захищав певну форму математичного атомізму, у якій можна розпізнати вплив демокрітівських атомістів і арістотелівських схоластиків. Це стає зрозуміло, коли звернутися до першого дня галілеєвих *Діалогів щодо двох нових наук* (1638р.). Сальвіаті, представник Галілея, стверджує, всупереч Брадвардайну і арістотелівським схоластикам, що неперервна величина зроблена з неподільних, насправді нескінченного числа них. Сальвіаті/Галілео визнає, що ця нескінченність неподільних ніколи не буде здійснена послідовним підподілом, але стверджує, що він має метод для породження її відразу, тим самим переміщуючи її зі сфери потенційного до фактичної реалізації: цей "метод для розділення і розкладання одним ударом цілої нескінченності" виявляється просто дією згинання прямої в коло. Тут Галілей знаходить дотепне "метафізичне" застосування ідеї розгляду круга як нескінченнобічного багатокутника. Коли пряма зігнута в коло, Галілей, здається, приймає, що тим самим прямій була наділена неподільними частинами, тобто точками. Але якщо вважати, що ці частини є сторонами нескінченнобічного багатокутника, то вони краще характеризуються не як неподільні точки, а радше як прямі, що згинаються, кожна відразу частина і дотична до кола. Галілео не згадує цієї можливості, але все ж нескладно виявити тут зародок ідеї розгляду кривої як нескінченно малого зібрання прямих ліній, що згинаються.

Учень і колега Галілея Бонавентура Кавальєрі (1598-1647) удосконалив використання неподільних до надійного математичного інструмента; справді, "метод неподільних" дотепер асоціюється із його іменем. Кавальєрі ніде не пояснює точно, що він розуміє під словом "неподільне", але очевидно, що він уявляє поверхню, як складену із множини рівновіддалених паралельних відрізків, а об'єм – паралельних площин, які названі неподільними поверхні і об'єму відповідно. Незважаючи на те, що Кавальєрі визнавав, що ці "множини" неподільних мусять бути необмежено великими, насправді був готовий розглядати їх фактично нескінченними, він ухилявся від слідування за Галілео в заплутування у тенета нескінченності, зрозумівши, що для того щоб "метод неподільних" працював, точне число задіяних неподільних *не має значення.* Насправді суттю методу методу Кавальєрі було встановлення відповідності між неподільними двох "подібних" форм (конфігурацій), а у випадках, які Кавальєрі розглядає, очевидно, що ця відповідність підказана винятково на геометричних основах, роблячи її достатньо незалежною від числа. Саме формулювання принципу Кавальєрі втілює цю ідею: якщо плоскі фігури поміщені між парою паралельних прямих і якщо їхні перерізи на будь-якій прямій, паралельній до цих прямих, знаходяться у фіксованому відношенні, то площі цих фігур знаходяться у тому самому відношенні. (Аналогічний принцип виконується для тіл.) Метод Кавальєрі є, по суті, скороченням виміру: тіла зводяться до площин із порівнюваними площами, а площини до прямих із порівнюваними довжинами. Хоча цього методу достатньо для обчислення площ або об'ємів, його не можна застосувати для спрямлювання кривих, оскільки скорочення у цьому випадку було би до точок, проте не можна надати ніякого змісту "відношенню" двох точок. Для спрямлювання, як стало зрозуміло пізніше, криву потрібно розглядати не як суму неподільних, тобто точок, а радше нескінченно малих прямих, її мікровідрізків.

Рене Декарт (1596-1650) застосовував техніку нескінченно малих, включно із методом неподільних Кавальєрі, у своїй математичній роботі. Проте він уникав використання нескінченно малих при визначенні дотичних до кривих, розвиваючи для цієї мети замість цього чисто алгебраїчні методи. Певний його найгостріший критицизм був спрямований на тих математиків, таких як Ферма, які використовували нескінченно малі у побудові дотичних.

Як філософа, Декарта можна широко охарактеризувати як синехіста. Його філософська система спирається на два фундаментальні принципи: знаменитий картезіанський дуалізм – поділ між розумом і матерією – і менш відоме ототожнення матерії і просторової протяжності. У *Meditations (Міркування)* Декарт розрізняє розум і матерію на тих підставах, що тілесне, будучи просторово протяжним, є подільним, натомість розумове безчастинне. Ототожнення матерії і просторової протяжності мало той наслідок, що матерія неперервна і подільна без границі. Оскільки протяжність є єдиною суттєвою властивістю матерії і, навпаки, матерія завжди супроводжує протяжність, то матерія мусить бути всюдисущою. Простір Декарта згідно з цим, як і для стоїків, є заповненістю, просякнутою неперервним середовищем.

Поняття нескінчено малої виникло із задачами геометричного характеру і нескінченно малі уявляли початково як такі, що належать виключно до королівства неперервної величини на противагу королівству дискретного числа. Але з алгебри і аналітичної геометрії 16-го і 17-го століть вийшло поняття *нескінченно малого числа*. Ця ідея вперше з'явилася у праці П'єра де Ферма (1601-65) про визначення максимальних і мінімальних значень, опублікованій у 1638 р. Трактування Ферма максимумів і мінімумів містить зародок плідної техніки "нескінченно малої зміни (варіації)", тобто дослідження поведінки функції, піддаючи її змінні малим змінам. Ферма застосував цей метод для визначення дотичних до кривих і центрів ваги.

Континуум і нескінченно малі у 17-у і 18-у століттях

Ісаак Барроу (1630-77) був одним із перших математиків, які вловили взаємне співвідношення між задачею квадратури і задачею знаходження дотичних до кривих – сучасною мовою між інтегруванням і диференціюванням. У своїх *Lectiones Geometricae* (1670 р.) Барроу зазначає, по суті, що якщо квадратура кривої $y = f(x)$ відома, із заданою площею $F(x)$ до x, то піддотична до кривої $y = F(x)$ вимірюється відношенням її ординати до ординати початкової кривої.

Барроу, радикальний синехіст, розглядав конфлікт між дивізіонізмом і атомізмом як живе питання і подав низку аргументів проти математичного атомізму, найсильніший з яких полягав у тому, що атомізм суперечить багатьом основним твердженням евклідової геометрії. Барроу уявляв неперервні величини як породжені рухами, і тому необхідно залежними від часу – погляд, який, здається, мусів мати сильний вплив на мислення його славетного учня Ісаака Ньютона (1642-1727). Міркування Ньютона протягом року чуми (1665-66) вилились у винахід того, що він назвав "Численням флюксій", принципи і методи якого були представлені у трьох трактатах, опублікованих багато років після того, як вони були написані: *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*; *Methodus fluxionum et serierum* *infinitarum*; та *De quadratura curvarum*. Підхід Ньютона до числення спирається, навіть більш рішуче, ніж у Барроу, на концепцію континуумів як породжених рухом.

Але експлуатація Ньютоном кінематичної концепції йшла значно далі, ніж у Барроу. У *De analysi* він, наприклад, запровадив позначення для "короткочасного приросту" (*моменту*) – що, очевидно, означало представляти момент або мить часу – абсциси або площі кривої, причому із самою абсцисою, що представляє час. Цей "момент" – фактично те саме, що нескінченно малі кількості, запроваджені попередньо Ферма і Барроу – Ньютон позначає o у випадку абсциси і $o\nu$ у випадку площі. Із того факту, що Ньютон використовує літеру ν для ординати, можна виснувати, що він думає про криву, як про графік швидкості від часу. Розглядаючи рухомий відрізок або ординату як момент площі, Ньютон встановив загальність і взаємне співвідношення між операціями диференціювання і інтегрування – факт, який Барроу зрозумів, але не використовував систематично. До Ньютона квадратура або інтегрування спирались остаточно "на деякий процес, яким елементарні трикутники або прямокутники додаються разом", тобто на метод неподільних. Явне трактування Ньютоном інтегрування як оберненого диференціювання було ключем до інтегрального числення.

У *Methodus fluxionum* Ньютон робить явною концепцію змінних кількостей як породжених рухами і запроваджує свої характерні позначення. Він називає кількість, породжену рухом, *флюентою*, а її темп породження – *флюксією*. Флюксію флюенти x позначено $\dot{x}$, а її момент або "нескінченно малий приріст, що накопичується за нескінченно короткий час o", – $\dot{x}o$. Задачу визначення дотичної до кривої перетворено у задачу знаходження співвідношення між флюксіями $\dot{x}$ і $\dot{z}$, коли цю задачу подано рівнянням, що представляє співвідношення між флюентами x і z. (Квадратура є оберненою задачею, тобто визначенням флюент, коли флюксії задано.) Отож, наприклад, у випадку флюенти $z = x^n$ Ньютон спершу утворює $\dot{z} + \dot{z}o = (\dot{x} + \dot{x}o)^n$, розкладає правий бік, використовуючи біноміальну теорему, віднімає $z = x^n$, ділить на o, нехтує всіма членами, які все ще містять o, і так одержує $\dot{z} = nx^{n-1}\dot{x}$.

Пізніше Ньютон був незадоволений незаперечною присутністю нескінченно малих у своєму численні та сумнівною процедурою "нехтування" ними. У передмові до *De quadratura curvarum* він зауважує, що немає необхідності запроваджувати в метод флюксій будь-який аргумент про нескінченно малі кількості. На їх місце він пропонує застосовувати те, що він називає методом *першого і останнього відношення*. На цей метод, у багатьох відношеннях передчуття концепції границі, була низка натяків у знаменитих *Principia mathematica philosophiae naturalis* (1687 р.) Ньютона.

Ньютон розвинув три підходи до свого числення, яких всіх він вважав такими, що приводять до еквівалентних результатів, але які відрізняються за ступенем строгості. Перший використовував нескінченно малі кількості, які, хоча й не скінченні, у той самий час не є точно нулями. Виявивши, що вони уникають точного формулювання, Ньютон зосередився замість цього на їх відношенні, яке, загалом, є скінченним числом. Якщо це відношення відоме, то нескінченно малі кількості, що утворюють його, можна замінити будь-якими підходячими скінченними величинами – такими як швидкості або флюксії – що мають таке саме відношення. Це є метод флюксій. Визнаючи, що цей метод сам потребує обґрунтування, Ньютон забезпечив його таким у формі доктрини перших і останніх відношень – кінематичній формі теорії границь.

Філософ-математик Г.В.Лейбніц (1646-1716) був дуже поглинутий задачею складання континууму – "лабіринту континууму", як він називав його. Справді, за його власним свідченням його філософська система – *монадизм* – виросла просто із боротьби із задачею як, або чи, континуум можна побудувати із неподільних елементів. Лейбніц запитує себе: якщо ми приймаємо, що кожна дійсна сутність є або простою одиницею або множиною і що множина необхідно є зібранням одиниць, то під якою категорією треба класифікувати геометричний континуум такий як пряма? Тепер пряма розширена і Лейбніц притримувався думки, що продовження є формою повторення, тому пряма, будучи подільною на частини, не може бути (істинною) одиницею. Тоді вона є множиною і згідно з цим зібранням одиниць. Але якого сорту одиниць? Напевне, єдиними кандидатами для геометричних одиниць є точки, але точки є не більше ніж кінцями розширених, і в будь-якому випадку, як знав Лейбніц, тверді аргументи, які йдуть ще від Арістотеля, встановлюють, що ніякий континуум не можна скласти з точок. З цього випливає, що континуум не є ні одиницею, ні зібранням одиниць. Лейбніц зробив висновок, що континууми взагалі *не є дійсними сутностями*; як "цілі, що передують їхнім частинам" вони замість цього мають чисто ідеальний характер. Цим способом він звільнив континуум від вимоги, що, як щось зрозуміле, він мусить бути простим або складеним з простих.

Лейбніц дотримувався думки, що простір і час, як континууми, є ідеальними, а будь-що дійсне, зокрема матерія, є дискретним, складеним з простих одиничних частинок, які він називав *монадами*.

Серед найвідоміших доктрин Лейбніца є *принцип* або *закон неперервності*. У дещо розпливчатій формі цей принцип був застосований у деяких випадках попередниками Лейбніца включно із Кузанським і Кеплером, але саме Лейбніц дав принципові "ясність формулювання, якого йому раніше бракувало, і можливо з цієї причини розглядав його своїм власним відкриттям". У листі до Бейля 1687 р. Лейбніц так сформулював цей принцип: "у будь-якому уявлюваному переході, що закінчується у будь-якій кінцевій точці, допустимо встановити загальне міркування, в яке можна включити фінальну кінцеву точку". Здається, це вказує на те, що Лейбніц розглядав "переходи" будь-якого сорту як неперервні. Звичайно, він дотримувався думки, що це було так у випадку геометрії і для природних процесів, де ця доктрина з'являється як принцип "Природа не робить стрибків". Згідно з Лейбніцем саме закон неперервності дає змогу геометрії і виникаючим методам числення нескінченно малих бути застосовними у фізиці. Принцип неперервності також забезпечив головні підстави для відкидання Лейбніцем матеріального атомізму.

Принцип неперервності також зіграв важливу роль, що лежала в основі математичної роботи Лейбніца, особливо у розвитку числення нескінченно малих. Ессе Лейбніца *Nova Methodus*(1684 р.) та *De Geometri Recondita* (1686 р.) можна назвати офіційним народженням диференціального і інтегрального числення відповідно. Його підхід до числення, у якому використання нескінченно малих відіграє центральну роль, має комбінаторні корені, прослідковувані до його ранньої роботи про виведені послідовності чисел. Якщо задана крива, визначена змінними x і y, що знаходяться у відповідності, він записував dx і dy для нескінченно малих різниць або *диференціалів* між значеннями x і y та записував dy/dx для відношення цих різниць, що, як він потім вважав, представляє нахил кривої у відповідній точці. Ця у вищій мірі формальна процедура, що наводить на думки, привела Лейбніца до правил для обчислення з диференціалами, що було досягнено відповідною модифікацією правил обчислення для звичайних чисел.

Хоча використання нескінченно малих було інструментальним у лейбніцевому підході до числення, у 1684 р. він запровадив концепцію диференціала, не згадуючи нескінченно малі кількості, майже напевно для того, щоб уникнути труднощів з основами. Він стверджує без доведення наступні правила диференціювання:

Якщо a – константа, то
$da = 0$
$d(ax) = adx$
$d(x + y - z) = dx + dy - dz$
$d(xy) = xdy + ydx$
$d(x/y) = [xdy - ydx]/y^2$
$d(x^p) = px^{p-1}dx$ також для дробового p.

Проте за формальною красою цих правил – раннім виявленням того, що пізніше розквітло до диференціальної алгебри – присутність нескінченно малих була відчутною, оскільки лейбніцеве означення дотичної використовувало і нескінченно малі відстані і концепцію кривої як нескінченнобічного багатокутника.

Лейбніц уявляв диференціали dx, dy як змінні, що змінюються над різницями. Це уможливило йому зробити важливий крок розглядати символ d як *оператор*, що діє на змінні, прокладаючи так шлях для *повторного застосування* d, що приводить до вищих диференціалів $ddx = d^2x$, $d^3x = dd^2x$ і, взагалі, $d^{n+1}x = dd^nx$. Лейбніц припустив, що диференціали першого порядку $dx, dy, ...$ були непорівнянно менші, ніж скінченні кількості $x, y, ...$ (або нескінченно малі відносно них), і, взагалі, що аналогічне відношення одержується між диференціалами $(n + 1)$-го порядку $d^{n+1}x$ і диференціалами n-го порядку d^nx. Він також припустив, що n-й степінь $(dx)^n$ диференціала першого порядку є того самого порядку величини як диференціал n-го порядку d^nx у тому розумінні, що частка $d^nx/(dx)^n$ є скінченною кількістю.

Для Лейбніца непорівнянна малість нескінченно малих виводилась із невиконання ними принципу Архімеда; а кількості, що відрізняються тільки нескінченно мало, потрібно було вважати рівними. Але незважаючи на те, що нескінченно малі уявлялися Лейбніцем як непорівнянно менші, ніж звичайні числа, закон неперервності ґарантував, що вони регулювалися такими самими законами, як і останні.

Підхід Лейбніца до нескінченно малих і диференціалів, здається, був такий, що вони забезпечують елементи, якими можна надати форму формальній граматиці (алгебрі) неперервного. Оскільки він вважав континууми чисто ідеальними сутностями, то для нього було досконало сумісно дотримуватися думки, що він і робив, що нескінченно малі кількості самі є не менш ідеальними – просто корисними фікціями, запровадженими, щоб скоротити доведення і допомогти розумінню.

Хоча сам Лейбніц не приписував нескінченно малому або (математичному) нескінченному об'єктивного існування, низка його послідовників не коливалися зробити так. Серед найзнаменитіших із них був Йоганн Бернуллі (1667-1748). Його лист до Лейбніца, написаний у 1698 р., містить пряме твердження, що "оскільки число членів у природі є нескінченним, то нескінченно мале існує *в силу самого цього факту*". Одне із його доведень існування актуально нескінченно малих починається із виставлення нескінченної послідовності $1/2, 1/3, 1/4, \ldots$. Якщо там є десять членів, то існує одна десята; якщо сто – одна сота, і т.д.; і тому, якщо, як постулюється, число членів є нескінченним, то існує нескінченно мале.

Числення Лейбніца здобуло широку аудиторію завдяки публікації у 1696 р. Гійомом де Лопіталем (1661-1704) першої роз'яснювальної книги з цього предмету *Analyse des Infiniments Petits Pour L'Intelligence des Lignes Courbes*. Вона ґрунтується на двох означеннях:

1. Змінні кількості – це ті, що неперервно зростають або спадають; а постійні або стаціонарні кількості – це ті, що продовжують те саме, поки інші змінюються.

2. Нескінченно мала частина, за допомогою якої змінна кількість неперервно зростає або спадає, називається диференціалом тої кількості.

Слідуючи Лейбніцу, Лопіталь пише dx для диференціала змінної величини x. Типовим застосуванням цих означень і постулатів є визначення диференціала добутку xy:

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = ydx + xdy + dxdy = ydx + xdy.$$

Тут останній крок виправдано постулатом 1, оскільки $dxdy$ є нескінченно малим порівняно з $ydx + xdy$.

Числення диференціалів Лейбніца, спираючись на дещо ненадійні опори, незабаром було піддане критиці. Атака голландського лікаря Бернарда Ньювентійдта (1654-1718) у роботах 1694-6 рр. становить особливий інтерес, оскільки Ньювентійдт запропонував своє власне викладення нескінченно малих, яке суперечило викладенню Лейбніца і мало власні чудові риси. Ньювентійдт постулює область кількостей або чисел, підпорядкованої відошенню впорядкування більше або менше. Ця область містить звичайні скінченні кількості, але припускається також, що містить нескінченно малі і нескінченні кількості – кількість є нескінченно малою або нескінченною, коли вона є меншою або, відповідно, більшою, ніж будь-яка довільно задана скінченна кількість. Ціла область керується певною версією принципу Архімеда, що зводиться до того, що нуль є єдиною кількістю, нездатною бути помноженою достатньо багато разів, щоб дорівнювати будь-якій заданій кількості. Нескінченно малі кількості можна охарактеризувати як частки b/m скінченної кількості b і нескінченної кількості m. На противагу диференціалам Лейбніца нескінченно малі Ньювентійдта мали ту властивість, що добуток будь-якої їх пари зникає (занулюється), зокрема квадрати і всі вищі степені нескінченно малих є нулем. Цей факт дав змогу Ньювентійдту показати, що для будь-якої кривої, заданої алгебраїчним рівнянням, гіпотенуза диференціального трикутника, породженого нескінченно малим приростом абсциси e співпадає з відрізком кривої між x і $x + e$. Тобто крива насправді є нескінченнобічним багатокутником.

Головні відмінності між численнями нескінченно малих Ньювентійдта і Лейбніца підсумовані у наступній таблиці:

Лейбніц	**Ньювентійдт**
Нескінченно малі є змінними	Нескінченно малі є постійними
Нескінченно малі вищого порядку існують	Нескінченно малі вищого порядку не існують
Добутки нескінченно малих не є абсолютними нулями	Добутки нескінченно малих є абсолютними нулями
Нескінченно малими можна нехтувати, коли нескінченно малі відносно інших кількостей	Нескінченно малими (першого порядку) ніколи не можна нехтувати

Наполягання на тому, що нескінченно малі підпорядковуються точно тим самим алгебраїчним правилам, що й скінченні кількості, змусило Лейбніца і захисників його диференціального числення трактувати нескінченно малі у присутності скінченних кількостей *так, нібито* вони є нулями, так що, наприклад, $x + dx$ трактується нібито це є те саме, що x. Це виправдовувалося на тих підставах, що диференціали потрібно вввважати змінними, а не фіксованими кількостями, що спадають постійно, аж поки не досягнуть нуля. Розглядувані тільки в "момент їхнього зникнення", вони згідно з цим не були ні чимсь, ні абсолютними нулями.

Отож, диференціалам (або нескінченно малим) dx було приписано по-різному чотири наступні властивості:

1. $dx \approx 0$,
2. ні $dx = 0$, ні $dx \neq 0$,
3. $dx^2 = 0$,
4. $dx \to 0$,

де "$\approx$" символізує "невідрізнюваний від", а "$\to 0$" символізує "стає зникаюче малим". Із цих властивостей тільки остання, в якій диференціал розглядають як змінну кількість, що прямує до 0, вижила у новому обґрунтуванні числення в термінах концепції границі.

Ведучим практиком числення, насправді ведучим математиком 18-го століття, був Леонард Ейлер (1707-83). Філософськи Ейлер був радикальним синехістом. Відкидаючи лейбніцівський монадизм, він віддавав перевагу картезіанській доктрині, що всесвіт заповнений неперервною етерною рідиною і притримувався хвильової теорії світла перед корпускулярною теорією, запропонованою Ньютоном.

Ейлер відкидав концепцію нескінченно малої як меншої, ніж будь-яка приписувана величина, але все-таки не рівної 0, доводячи: що диференціали мусять бути нулями і dy/dx – часткою $0/0$. Оскільки для будь-якого числа α, $\alpha \cdot 0 = 0$, то Ейлер стверджував, що частка $0/0$ могла би представляти будь-яке число. Для Ейлера як формаліста числення, по суті, було процедурою для визначення значення виразу $0/0$ у багатоманітних ситуаціях, де він виникає як відношення зникаючих приростів.

Проте в математичному аналізі природних явищ Ейлер разом із низкою його сучасників справді застосовували те, що зводилося до нескінченно малих у вигляді крихітних, але більш-менш конкретних елементів континууму, трактуючи їх не як атоми або монади у строгому розумінні – як частини континууму вони з необхідністю мусять бути подільними – а як достатньо крихітні, щоб зберегти їхню прямокутну *форму* під нескінченно малим потоком, і все-таки дозволяючи їх *об'ємові* зазнавати нескінченно малої зміни. Ця ідея мала стати фундаментальною у механіці континууму.

В той час як Ейлер трактував нескінченно малі як формальні нулі, тобто як фіксовані кількості, його сучасник Жан ле Рон Даламбер (1717-83) мав інший погляд на справу. Слідуючи настанові Ньютона, він уявляв нескінченно малі або диференціали в термінах концепції границі, яку він сформулював твердженням, що одна змінна кількість є границею іншої, якщо друга може наблизитися до іншої ближче, ніж будь-яка задана кількість. Даламбер рішуче відкинув ідею нескінченно малих як фіксованих кількостей і побачив ідею границі як такої, що забезпечує методологічний корінь диференціального числення. Для Даламбера мова нескінченно малих або диференціалів була просто зручним скороченням для уникнення громіздкості вираження, потрібної при використанні концепції границі.

Нескінченно малі, диференціали, зникаючі кількості і подібне курсувало в жилах числення протягом 18-го століття. Хоча й неясні, навіть логічно підозрілі, ці концепції забезпечили, *за браком кращого*, інструменти для висновування великого багатства результатів, які числення зробило можливими. І хоча багато математиків 18-го століття, із видатним винятком Ейлера, відчували незручність із нескінченно малими, вони би не ризикнули вбити гуску, яка несе так багато золотих математичних яєць. Відповідно вони утримувалися від руйнівної критики ідей, що лежали в основі числення. Проте філософи не були зв'язані такими обмеженнями.

Філософ Джордж Берклі (1685-1753), відомий суб'єктивно-ідеалістичною доктриною *існувати означає бути в сприйнятті* та запереченням загальних ідей, був постійним критиком припущень, що лежали в основі математичної практики його доби. Найвідоміші залпи були спрямовані на числення, але насправді його конфлікт із математиками йшов глибше. Тому що його заперечення існування абстрактних ідей будь-якого сорту прямо протилежне відволікальному (абстракціоністському) викладенню математичних концепцій, якого дотримувалась більшість математиків і філософів тої доби. Центральним догматом (принципом) цієї доктрини, що походила від Арістотеля, є те, що розум створює математичні концепції відволіканням (*абстракцією*), тобто мисленним придушенням посторонніх рис об'єктів, що сприймаються, так, щоб зосередитися на властивостях, виділених увагою. Берклі відкидав це, стверджуючи, що математика як наука у кінцевому рахунку має справу з об'єктами відчуття, її визнана загальність походить із здатності об'єктів чи результатів сприйняття служити знаками для всіх об'єктів чи результатів подібної форми.

Спершу Берклі насміявся над тими, хто притримувався концепції нескінченно малого, ствердивши, що використання нескінченно малих при висновуванні математичних результатів оманливе і фактично усувне. Проте пізніше він прийняв терпиміший підхід до нескінченно малих, розглядаючи їх як корисні вигадки (фікції), дещо подібним способом, як це робив Лейбніц.

В *Аналісті* (1734 р.) Берклі висловив свою найстійкішу і найрозробленішу критику нескінченно малих та цілої метафізики числення. Адресований *До невіруючого математика*, цей трактат було написано із відкрито заявленою метою захисту теології проти скептицизму, що поділявся багатьма математиками і вченими тої доби. Захист релігії зводився до твердження, що твердження математиків щодо числення є не менш слабкими, ніж твердження теологів щодо таїнств божих.

Аргументи Берклі спрямовані, головним чином, проти ньютонівського числення флюксій. Типове із його заперечень полягає в тому, що, намагаючись уникнути нескінченно малих використанням таких засобів як зникаючі кількості та перших і останніх відношень, Ньютон фактично порушив закон несуперечності, спершу піддаючи кількість приростові, а потім приймаючи приріст рівним 0, тобто заперечуючи те, що приріст коли-небудь був присутній. Щодо самих флюксій і зникаючих приростів Берклі сказав ось що:

"А чим є ці флюксії? Швидкостями зникаючих приростів? А чим є ці самі зникаючі прирости? Вони не є ні скінченними кількостями, ні нескінченно малими кількостями, ні навіть нічим. Чи не можна назвати їх привидами померлих кількостей?"

Лейбніців метод диференціалів також не уник суворої критики Берклі.

Протилежність між неперервністю і дискретністю відіграє значну роль у філософському мисленні Іммануеля Канта (1724-1804). Його зріла філософія, *трансцендентальний ідеалізм*, спирається на поділ дійсності на дві сфери. Перша – *феноменальна* сфера(тобто сфера сприймуваного чуттями) – складається з явищ або об'єктів можливого досвіду, окреслене формами чуттєвості і категоріями пізнання. Друга – *ноуменальна* сфера (тобто сфера розумового споглядання) – складається з сутностей розуміння, яким ніякі об'єкти досвіду ніколи не можуть відповідати", тобто речей-в-собі.

Явища, що розглядають як величини, є часово-просторово протяжними і неперервними, тобто нескінченно або принаймні безмежно подільними. Простір і час утворюють порядок, що лежить в основі явищ, тому самі в кінцевому рахунку феноменальні, і звідси також неперервні.

Як об'єкти знання, явища є неперервними *екстенсивними* (протяжними) величинами, але як об'єкти відчуття або сприйняття вони є, згідно з Кантом, *інтенсивними* величинами. Під інтенсивною величиною Кант розуміє величину, що володіє *ступенем* і тому здатна осягатися почуттями: наприклад, яскравість або температура. Інтенсивні величини цілковито вільні від інтуїцій простору і часу і "можуть бути представлені тільки як одиниці". Але, подібно до екстенсивних величин, вони є неперервними. Крім того, явища завжди представлені чуттям як інтенсивні величини.

У *Критиці чистого розуму* (1781 р.) Кант вносить нову тонкість (і треба зазначити, закрут) в аналіз протилежності між неперервністю і дискретністю. Її можна побачити у другій із славетних антиномій, яка стосується питання складу матерії або протяжної речовини. Є вона (а) дискретною, тобто складається з простих або неподільних частин, чи (б) неперервною, тобто містить частини всередині частин *до нескінченності*? Хоча (а), що Кант називає *тезою*, і (б) – *антитезою*, здається, суперечать одне одному, Кант пропонує доведення обох тверджень. Він стверджує, що одержану суперечність можна розв'язати, зауважуючи, що, в той час як антиномія "пов'язана із поділом явищ", аргументи для (а) і (б) неявно трактують матерію чи речовину як речі-в-собі. Кант робить висновок, що теза і антитеза "припускають неприйнятну умову" і згідно з цим "обидві руйнуються, оскільки умова, за якою єдиною кожну з них можна ствердити, сама не виконується".

Кант ототожнює неприйнятну умову, як неявне прийняття матерії як речі-в-собі, що у свою чергу приводить до помилки прийняття поділу матерії на частини незалежно від акту поділу. У цьому випадку теза тягне, що послідовність поділів скінченна; а антитеза – що нескінченна. Вони не можуть бути істинними про *завершену* (або принаймні завершувану) послідовність поділів, що би випливало з прийняття матерії або речовини як речі-в-собі. Тепер, оскільки показано, що істинність обох тверджень випливає з цього припущення, то воно мусить бути хибним, тобто матерія і протяжна речовина є тільки явищами. А для явищ, стверджує Кант, поділи на частини не є завершувані в досвіді, із результатом, що такі поділи можна вважати, вражаючою фразою: "ні скінченними, ні нескінченними". З цього випливає, що для явищ теза і антитеза обидві *хибні*.

Пізніше у *Критиці* Кант говорить більше про питання подільности, стверджуючи, що, в той час як кожна частина, породжена послідовністю поділів пізнаного цілого, задана з цілим, незавершуваність послідовності перешкоджає утворенню цілого; *тим більше* ніяка така послідовність не може бути актуально нескінченною.

Континуум та нескінченно малі у 19-у столітті

Швидкий розвиток математичного аналізу у 18-у столітті не приховав того факту, що концепціям, які лежали в його основі, не тільки бракувало строгих означень, а вони були навіть (наприклад, у випадку диференціалів і нескінченно малих) сумнівного логічного характеру. Брак точності у понятті неперервної функції, що все ще розумілась як представлена формулою і чию асоційовану криву можна нарисувати гладко, призвів до сумнівів щодо законності низки процедур, у яких ця концепція фігурувала. Наприклад, часто припускали, що кожну неперервну функцію можна виразити нескінченним рядом за допомогою теореми Тейлора. На початку 19-го століття це та інші припущення почали ставити під сумнів, започатковуючи тим самим дослідження того, що треба розуміти під функцією загалом і неперервною функцією зокрема.

Першовідкривачем у справі прояснення концепції неперервної функції був священник з Богемії, філософ і математик Бернард Больцано (1781-1848). У *Rein analytischer Beweis* (1817 р.) він визначає (дійснозначну функцію) f як неперервну у точці x, якщо різницю $f(x+\omega)-f(x)$ можна зробити меншою, ніж будь-яка вибрана наперед кількість, як тільки нам дозволено взяти ω таким малим, як ми хочемо. Це, по суті, те саме, що й означення неперервності в термінах концепції границі, запропонованого трошки пізніше Коші. Больцано також сформулював означення похідної функції, вільне від поняття нескінченно малої. Больцано зрікся ейлерівського трактування диференціалів як формальних нулів у таких виразах як dy/dx, пропонуючи замість цього, щоб при визначенні похідної функції прирости $\Delta x, \Delta y, ...$ *остаточно* було *взято* нулем. Для Больцано диференціали мають статус ідеальних елементів, чисто формальних сутностей таких як точки і прямі на нескінченності у проективній геометрії або (як зазначає сам Больцано) уявні числа, використання яких ніколи не приведе до хибних тверджень, що стосуються дійсних кількостей.

Хоча Больцано передбачив форму, якої би вимагало строге формулювання концепцій числення, його робота була у великій мірі проігнорована за його життя. Наріжний камінь для строгого розвитку числення було забезпечено ідеями – по суті подібними до ідей Больцано – відомого французького математика Ог'юстена-Луї Коші (1789-1857). У роботі Коші, як і в Больцано, центральну роль відіграє концепція границі, звільнена від всілякої геометричної і часової інтуїції. Коші також сформулював умову для збіжності послідовності дійсних чисел до границі і відомий критерій для збіжності, а саме, що послідовність $< s_n >$ збіжна, якщо і тільки якщо $s_{n+r} - s_n$ можна зробити меншим за абсолютним значенням, ніж будь-яка приписувана кількість, для всіх r і достатньо великих n. Коші довів, що це необхідно для збіжності, проте щодо достатності просто зауважив: "коли різні умови виконані, збіжність ряду гарантовано". Роблячи це твердження, він неявно апелював до геометричної інтуїції, оскільки не зробив ніяких спроб визначити дійсні числа, зауваживши лише, що ірраціональні числа потрібно вважати границями послідовностей раціональних чисел.

Коші охарактеризував неперервність функції у термінах зробленого строгим поняття нескінченно малого, яке він визначив у *Cours d'analyse* (1821 р.) як "змінну кількість, значення якої спадає невизначено таким способом, що збігається до границі 0." Ось його означення неперервності. Означення Коші неперервності $f(x)$ в околі значення a зводиться, в сучасних позначеннях, до умови, що $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Коші визначив похідну $f'(x)$ функції $f(x)$ способом, суттєво подібним до способу Больцано.

Робота Коші (як і Больцано) становила вирішальний крок у зреченні математиків – передбаченому у роботі Даламбера – від (фіксованих) нескінченно малих і інтуїтивних ідей неперервності і руху. Деякі математики тієї доби, такі як Пуассон і Карно, які вважали концепцію границі не більше, ніж кружною заміною замість використання нескінченно малих величин, які в будь-якому випадку (як вони стверджували) справді існують, відчули, що реформу Коші було виконано занадто далеко. Проте сліди традиційних ідей насправді залишилися у формулюваннях Коші, що засвідчено використанням таких виразів як "змінні кількості", "нескінченно малі кількості", "наближається невизначено", "таке мале, як ми хочемо" і подібних.

Тим часом німецький математик Карл Вайєрштрасс (1815-97) завершував вигнання часово-просторової інтуїції і нескінченно малих із основ аналізу. Щоб привити повну логічну строгість, Вайєрштрасс запропонував встановити математичний аналіз на основі самого числа, арифметизувати його – насправді замінити неперервне дискретним. "Арифметизацію" можна вважати формою математичного атомізму. Переслідуючи цю мету, Вайєрштрасс повинен був спочатку сформулювати строге "арифметичне" значення дійсного числа. Він досяг цього, визначивши (додатне) дійсне число як зліченну множину додатних раціональних чисел, для яких сума будь-якої скінченної підсуми завжди залишається нижче деякої приписаної наперед межі, а потім точно визначивши умови, за яких два такі "дійсні числа" треба вважати рівними або одне строго меншим від другого.

Вайєрштрасс турбувався про очищення основ аналізу від всіх слідів інтуїції неперервного руху – словом, заміни змінного нерухомим. Для Вайєрштрасса змінна x просто була символом, що позначає довільний член заданої множини чисел, а неперервна змінна – така, що відповідна їй множина S має таку властивість, що будь-який інтервал навколо будь-якого члена x із S містить члени S, відмінні від

x. Вайєрштрасс також сформулював відоме (ε, δ)-означення неперервної функції: функція $f(x)$ є неперервною в a, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ для всіх x таких, що $|x - a| < \delta$.

Продовжуючи зусилля Вайєрштрасса, ще одну атаку на проблему формулювання строгих означень неперервності і дійсних чисел здійснив Ріхард Дедекінд (1831-1916). Дедекінд зосередив увагу на питанні: чим точно є те, що відрізняє неперервну функцію від розривної? Здається, він був першим, хто визнав, що властивість щільності, якою володіє впорядкована множина раціональних чисел, є недостатньою, щоб гарантувати неперервність. У *Неперервність та ірраціональні числа* (1872 р.) він зауважив, що коли раціональні числа асоційовані з точками на прямій, "є нескінченно багато точок [на прямій], яким не відповідає ні одне раціональне число", так що раціональні числа проявляють "щілинність, неповноту, розривність", на відміну від "відсутності щілин, повноти, неперервності" прямої. Дедекінд вважав цей принцип, по суті, недовідним; він приписував йому радше статус аксіоми, "за якою ми приписуємо прямій її неперервність, за якою ми мислимо неперервність у прямій". Дедекінд наголошує, що для *простору* не є необхідним бути неперервним у цьому сенсі, тому що "багато властивостей залишились би тими самими, навіть якби він був розривним".

Заповнення щілин у раціональних числах за допомогою "створення нових точок-індивідів" є ключовою ідеєю, що лежить в основі дедекіндової побудови області дійсних чисел. Спершу він визначив *переріз* як розбиття (A_1, A_2) раціональних чисел таке, що кожний член A_1 є менший, ніж кожний член A_2. Зазначивши, що кожне раціональне число відповідає очевидним способом певному перерізу, він зауважив, що нескінченно багато перерізів не є породжені раціональними числами. Розривність або неповнота області раціональних чисел полягає просто в цьому останньому факті.

Потрібно зазначити, що Дедекінд не ототожнював ірраціональні числа із перерізами; радше, кожне ірраціональне число заново "створене" розумовою дією і залишається достатньо відмінним від асоційованого з ним перерізу. Дедекінд продовжив показом того, як область перерізів, і тим самим асоційовану область дійсних чисел, можна впорядкувати таким способом, щоб вона володіла властивістю *непрервності*, тобто "якщо систему $\mathfrak{R}$ всіх дійсних чисел поділено на два класи $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, такі, що кожне число a_1 класу $\mathfrak{U}_1$ є менше, ніж кожне число a_2 класу $\mathfrak{U}_2$, то існує одне і тільки одне число, яким здійснено це розділення".

Найбільш провидчим "арифметизатором" з усіх був Георг Кантор (1845-1918). Аналіз Кантором континууму в термінах нескінченних точкових множин привів його до теорії трансфінітних чисел і до остаточного звільнення концепції множини від її геометричних початків як колекції точок, підготувавши так ґрунт для виникнення концепції загальної впорядкованої множини, центральної у математиці сьогодення. Подібно до Вайєрштрасса і Дедекінда, Кантор ставив метою сформулювати відповідне вимогам означення дійсних чисел, яке би уникало припущення їхнього попереднього існування, і він йде за ними, ґрунтуючи своє означення на раціональних числах. Ідучи за Коші, він називає послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ раціональних чисел *фундаментальною послідовністю*, якщо для будь-якого додатного раціонального ε існує ціле N таке, що $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ для всіх m і всіх $n > N$. Кажуть, що будь-яка послідовність $< a_n >$, що задовольняє цю умову, має визначену границю b. Як Дедекінд прийняв ірраціональні числа як "розумові об'єкти", асоційовані з перерізами, так, аналогічно, Кантор вважав ці визначені границі нічим більшим, ніж формальними символами, асоційованими із фундаментальними послідовностями. Область B таких символів можна вважати збільшенням області A раціональних чисел. Після накладання арифметичної структури на область B Кантор взяв на себе сміливість посилатися на її елементи як на (дійсні) числа. Проте він все ще наполягав на тому, що ці "числа" не мають існування за винятком того, що вони є представниками фундаментальних послідовностей. Потім Кантор показав, що кожна точка на прямій відповідає визначеному елементу з B. Навпаки, кожний елемент B повинен визначати визначену точку на прямій. Розуміючи, що інтуїтивна природа лінійного континууму заважає строгому доведенню цієї властивості, Кантор просто припустив її як аксіому, точно як це зробив Дедекінд щодо свого принципу неперервності.

Для Кантора, який розпочинав як теоретико-числовик, і весь час його кар'єри залишався вірним дискретному, радше саме числа, ніж геометричні точки, володіли об'єктивним значенням. Насправді ізоморфізм між дискретною числовою областю B і лінійним континуумом розглядався Кантором, по суті, як засіб для полегшення маніпуляцій з числами.

Арифметизація Кантором континууму мала наступний важливий наслідок. Довго визнавалося, що множини точок будь-якої пари відрізків, навіть якщо один із них є нескінченний за довжиною, можна поставити у взаємно однозначну відповідність. Вважали, що цей факт показує, що такі множини точок не мають коректно визначеного "розміру". (Ще у 1766 р. Кант зробив висновок із такої відповідності, що геометрична пряма не може складатися з неподільних частин; при цьому він посилається на обізнаних геометрів.) Але ототожнення Кантором множини точок на лінійному континуумі з областю чисел дало йому змогу порівнювати розміри точкових множин визначеним способом, використовуючи добре обґрунтовану ідею взаємно однозначної відповідності між множинами чисел.

Дослідження Кантором властивостей підмножин лінійного континууму подано у шести чудових статтях, опублікованих протягом 1879-84 рр. *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* ("Про нескінченні, лінійні точкові многовиди"). Багаті ідеями, ці статті надали перші викладення революційної теорії Кантора нескінченних множин і їх застосування до класифікації підмножин лінійного континууму. У четвертій з цих статей *Grundlagen* (1883 р.) є деякі із найбільш пошукових спостережень Кантора про природу континууму.

Кантор почав своє дослідження континууму із гострого огляду суперечностей, які традиційно оточували це поняття, зазначаючи, що континуум аж донедавна вважали, по суті, неаналізовним поняттям. Справою Кантора є "розвинути поняття континууму так тверезо і коротко, як можливо, і тільки відносно математичної теорії множин". Це відкриває шлях, як він вірив, формулюванню точного поняття континууму. Кантор вказує, що ідея континууму дотепер просто припускалася математиками, які мали справу з аналізом неперервних функцій і подібного, і "не була піддана будь-якому досконалому огляду".

Відкидаючи будь-яке використання просторової або часової інтуїції у точному визначенні континууму, Кантор береться за його точне арифметичне означення. Посилаючись на означення дійсного числа, яке він вже забезпечив (тобто в термінах фундаментальних послідовностей), він запровадив n-вимірний арифметичний простір G_n як множину всіх енок дійсних чисел $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$, називаючи кожну таку *арифметичною точкою* G_n. Відстань між двома такими точками задано так:

$$\sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + \cdots + (x_n' - x_n)^2}.$$

Кантор визначає *арифметичну* точко-множину в G_n як будь-яку "сукупність точок простору G_n, що задано подібним на закон способом".

Після зауваження, що він попередньо показав, що всі простори G_n мають таку саму потужність, як множина дійсних чисел в інтервалі $(0, 1)$, і повторення його впевненості в тому, що будь-які нескінченні точко-множини мають або потужність множини натуральних чисел або множини $(0, 1)$, Кантор повертається до означення загального поняття континууму всередині G_n. Для цього він застосував поняття *похідної множини* точко-множини, запроваджене у статті 1872 р. про тригонометричні ряди. Кантор визначив похідну множину точко-множини P як множину *граничних точок* P, де гранична точка P – це точка G_n із нескінченно багатьма точками P, як завгодно близькими до неї. Точко-множина називається досконалою, якщо вона збігається зі своєю похідною множиною. Кантор зауважує, що ця умова недостатня, щоб охарактеризувати континуум, оскільки в лінійному континуумі можна побудувати досконалі множини, які не є щільними ні в якому як завгодно малому інтервалі: як приклад такої множини він пропонує множину, що складається з всіх дійсних чисел в $(0, 1)$, трійковий розклад яких не містить "1".

Згідно з цим потрібна додаткова умова, щоб означити континуум. Кантор дав її, запровадивши поняття зв'язної множини. Точко-множина T є зв'язною в розумінні Кантора, якщо для будь-якої пари її точок t, t' і будь-якого довільно малого числа ε існує скінченна послідовність точок $t_1, t_2, \ldots, t_n$ у T, для яких всі відстані $[tt_1]$, $[t_1t_2]$, $[t_2t_3]$, ..., $[t_nt']$ менші, ніж ε. Тепер Кантор визначує континуум як досконалу зв'язну точко-множину.

Кантор просунувся далі за своїх попередників у формулюванні того, що є, по суті, топологічним означенням континууму, тобто такого, що все ще залежне від метричних понять, не містить відношення порядку. Цікаво порівняти означення Кантором континууму із означенням континууму у сучасній загальній топології. У добре відомих підручниках (наприклад, Хокінга і Юнга (1961р.)) з цього предмета знаходимо, що континуум визначено як компактну зв'язну підмножину топологічного простору. Тепер, у будь-якій обмеженій області евклідового простору можна показати, що континууми Кантора збігаються з континуумами у розумінні сучасного означення. Хоча у Кантора не було означення компактності, його вимога, щоб континууми були "повними" (що привело до відкидання ним як континуумів таких некомпактних множин, як відкриті інтервали або круги), не дуже далека від цієї ідеї.

Протягом всієї математичної кар'єри Кантора він дотримувався непохитного, навіть догматичного спротиву нескінченно малим, нападаючи на зусилля таких математиків як Дюбуа-Реймон і Веронезе сформулювати строгі теорії актуальних нескінченно малих. На його думку, нескінченно малі є поза сферою можливого; нескінченно малі є не більше, ніж "за́мками у повітрі, або ж просто безглуздям", які потрібно класифікувати "як кругові квадрати і квадратні круги". Його огида до нескінченно малих була такою глибокою, що привела його до прямого паплюження, затавровування їх як "холерних бацил математики". Відкидання Кантором нескінченно малих виникло із впевненості, що його власна теорія трансфінітних ординальних (порядкових) і кардинальних (кількісних) чисел вичерпує сферу обчислюваного, того, що піддається рахунку, отож, ніяке подальше узагальнення поняття числа, зокрема, будь-яке, що охоплювало би нескінченно малі, неприйнятне.

Критичні відгуки на арифметизацію

Всупереч великому успіху Вайєрштрасса, Дедекінда і Кантора у побудові континууму з арифметичного матеріалу, низка мислителів кінця 19-го та початку 20-го опиралися в різній мірі ідеї пояснення поняття континууму цілковито в дискретних термінах. Серед них були філософи Брентано і Пірс та математики Пуанкаре, Брауер і Вейль.

В останні роки свого життя австрійський філософ Франц Брентано (1838-1917) був поглинутий природою неперервного. В основах викладення Брентано споріднене із викладенням Арістотеля. Брентано вважає неперервність чимось даним у сприйнятті, радше споконвічним за природою, ніж математичною побудовою. Він дотримувався думки, що ідея неперервного абтрагована із чуттєвої інтуїції. Брентано пропонує, що неперервне з'являється за допомогою чуттєвої інтуїції трьома фазами. По-перше, відчуття представляється нам об'єктами, що мають частини, які співпадають. Із таких об'єктів своєю чергою абстрагується поняття *межі*, а потім вловлюються, що ці об'єкти фактично *містять* співпадаючі межі. Нарешті, бачать, що це все, що потрібно, щоб вловити поняття континууму.

Для Брентано суттєвою рисою континууму є притаманна йому здатність породити межі і той факт, що такі межі можна вловити як співпадаючі. Самі межі володіють якістю, яку Брентано називає *плерозисом* ("повнотою"). Плерозис є мірою числа напрямів, у яких дана межа фактично обмежує. Отож, наприклад, у часовому континуумі кінцева точка минулого епізоду або початкова точка майбутнього обмежує у єдиному напрямі, незважаючи на те, що можна сказати, що точка, яка позначає кінець одного епізоду і початок іншого, обмежує двояко. У випадку просторового континууму є численні додаткові можливості: тут межа може обмежувати у всіх напрямах, у яких вона здатна обмежувати, або може обмежувати тільки у деяких із цих напрямів. У першому випадку кажуть, що межа існує у *повному плерозисі*, у другому – *частковому*. Брентано вважав, що поняття плерозису робить можливим сенс ідеї, що межа володіє "частинами", навіть якщо межа не має вимірів, як у випадку точки. Отож, хоча теперішній час або "тепер" згідно із Брентано часово непротяжний і існує тільки як межа між минулим і майбутнім, він все-таки володіє двома "частинами" або аспектами: це є кінець минулого і початок майбутнього. Варто зазначити, що для Брентано не тільки "тепер" існує як межа; оскільки, подібно до Арістотеля, він дотримувався думки, що "існування" у строгому розумінні означає "існування *тепер*", з цього необхідно випливало, що існуючі речі існують тільки як межі того, що існувало, або того, що існуватиме, або і того, і другого.

Брентано мав дещо неясний погляд на зусилля математиків побудувати континуум із чисел. Його підхід змінювався від відкидання таких спроб як неадекватних до надання їм статусу "фікцій". Це не дивно за умови його арістотелівської схильності приймати математичні і фізичні теорії радше як справжні описи емпіричних явищ, ніж ідеалізації: на його погляд, якщо би такі теорії потрібно було вважати буквальними описами досвіду, то вони не зводились би ні до чого кращого, ніж "неправильні тлумачення".

Аналіз Брентано континууму зосередився на його феноменологічних і якісних аспектах, які за самою своєю природою нездатні бути зведеними до дискретного. Отож, відкидання Брентано спроб математиків побудувати континуум у дискретних термінах навряд чи дивне.

Погляд американського філософа-математика Чарльза Сандерса Пірса (1839-1914) на континуум був у певному сенсі проміжним між поглядами Брентано і арифметизаторів. Подібно до Брентано він дотримувався думки, що зчепленість континууму виключає для нього можливість бути простою колекцією дискретних індивідів або точок, у звичайному розумінні. І навіть раніше Брауера Пірс, здається, був обізнаний, що правильне викладення континууму міститиме піддання сумніву закону виключеного третього. Пірс також дотримувався думки, що континуум дає притулок *необмежено великій* колекції точок – у його колоритній термінології *супербагаточисленній* колекції – те, що ми тепер назвали би *властивим класом*. Пірс стверджував, що якщо би "достатньо" точок було зібрано разом виконанням вставлення нових точок між старими до остаточної межі, то вони – через *логічне* "перетворення кількості в якість" – втратили би їхню індивідульність і сплавились би в істинний континуум.

Пірсова концепція числового континууму видатна також із-за присутності в ній величезної кількості *нескінченно малих*. Пірс відстоював утримання поняття нескінченно малого в основах числення, як із-за того, що він бачив ефективність методів нескінченно малих, так і тому, що він розглядав нескінченно малі як "клей", що змушує точки на неперервній прямій втрачати їхню індивідуальність.

Ідея неперервності відігравала центральну роль у мисленні видатного французького математика Анрі Пуанкаре (1854-1912). Приймаючи арифметичне означення континууму, він піддавав сумніву той факт, що (як у формулюваннях Дедекінда і Кантора) так виготовлені (ірраціональні) числа є простими символами, відділеними від їхніх джерел в інтуїції. На відміну від Кантора, Пуанкаре прийняв нескінченно малі, хоча навіть і не вважав всі прояви цього поняття корисними.

Голландський математик Л.Е.Брауер (181-1966) найбільше відомий як засновник філософії (нео)інтуїціонізму. Його у вищій мірі ідеалістичні погляди на математику дещо подібні до поглядів Канта. Для Брауера математичні поняття прийнятні тільки тоді, коли вони належно обґрунтовані в інтуїції, математичні теорії важливі тільки тоді, коли вони стосуються сутностей, які побудовані з чогось, заданого безпосередньо, і інтуїції, а математичне доведення є формою побудови в інтуїції. Визнаючи, що поява неевклідової геометрії дискредитувала погляд Канта на простір, Брауер, на противагу логіцистам (яких він називав "формалістами"), дотримувався думки, що арифметика, і тому вся математика, мусить висновуватися з часової інтуїції.

Спочатку Брауер твердо дотримувався думки, що континуум непобудовний із дискретних точок, проте пізніше модифікував цю доктрину. У зрілій думці він перетворив поняття точки, наділяючи точки достатньою текучістю, щбо дати їм змогу служити генераторами "істинного" континууму. Ця текучість досягалася прийняттям як "точок" не тільки повністю визначених дискретних чисел таких як $\sqrt{2}, \pi, e$ та подібних – які вже, так сказати, досягнули "буття" – але також і "чисел", які є у вічному стані становлення в тому, що їхні входи у десяткові (або двійкові) розвинення є результатом вільних актів вибору суб'єктом, що діє протягом невизначено тривалого часу. Результуючі вибірні послідовності не можна уявляти як закінчені, завершені об'єкти: у будь-який момент відомий тільки початковий відрізок. Цим способом Брауер одержав математичний континуум способом, сумісним із його вірою у споконвічну інтуїцію часу – тобто як незакінчену, насправді незакінчувану, сутність у вічному стані зростання, "середовище вільного розвитку". У його концепції математичний континуум насправді "побудований", проте не розбиванням початково, як це зробили Кантор і Дедекінд, інтуїтивного континууму на ізольовані точки, а радше складанням його із комплексу неперервно змінних частин, що частково перекриваються.

Математичний континуум, як він уявлявся Брауером, виявляє низку рис, які видаються дивними для класичного ока. Наприклад, у брауерівському континуумі звичайний закон порівнюваності, а саме, що для будь-яких дійсних чисел a, b або $a < b$ або $a = b$ або $a > b$, не виконується. Ще фундаментальнішим є невиконання закону виключеного третього у тій формі, що для будь-яких дійсних чисел a, b або $a = b$ або $a \neq b$. Невиконання цих з виду безсумнівних принципів у свою чергу робить недійсними доведення низки основних результатів класичного аналізу, наприклад, теореми Больцано-Вейєрштрасса, а також теорем про монотонну збіжність, проміжне значення, найменшу верхню межу, максимальне значення для неперервних функцій.

Хоча брауерівський континуум може володіти низкою негативних рис з точки зору класичного математика, він має ту перевагу, що ближче відповідає континууму інтуїції, ніж його класичний двійник. Що далеко не дивно, невиконання закону виключеного третього для точок в інтуїціоністському континуумі можна розглядати як таке, що добре підходить до характеру інтуїтивного континууму.

У 1924 р. Брауер показав, що кожна функція, визначена на замкненому відрізку його континууму, є рівномірно неперервною. Внаслідок цього інтуїціоністський континуум є нерозкладним, тобто його не можна розколоти на дві частини, які не перетинаються, яким завгодно способом. На противагу дискретній сутності, нерозкладний браурівський континуум не можна скласти із його частин. Бачення Брауером континууму стало в останні десятиліття предметом інтенсивного математичного дослідження.

Герман Вейль (1885-1955) – один із найбільш різнобічних математиків 20-го століття – був поглинутий природою континууму. У книзі *Das Kontinuum* (1918 р.) він намагався надати континууму строге математичне формулювання, вільне від теоретико-множинних припущень, які він почав вважати заперечуваними. Як він бачив, існує незамощувана прогалина між інтуїтивно заданими континуумами (наприклад, континуумами простору, часу і руху) з одного боку і дискретними точними поняттями математики (наприклад, поняттям дійсного числа) – з другого. Для Вейля присутність цього розколу означала, що побудову математичного континууму не можна "прочитати" просто з інтуїції. Радше, вважав він, математичний континуум треба трактувати і в кінці кінців виправдовувати тим самим способом, що й фізичну теорію. Проте, як би сильно він не хотів цього, у *Das Kontinuum* Вейль не прагнув подати математичного формулювання континууму, як той представлений в інтуїції, що, як показує цитата вище, він вважав неможливим (принаймні у той час). Радше, його метою було спершу досягнути *сумісності*, приймаючи *арифметичне* поняття дійсного числа на строгій логічній базі, а потім показати, що теорія, яку одержано, є *прийнятною*, застосовуючи її як базу для правдоподібного викладення неперервного процесу в об'єктивному фізичному світі.

Пізніше Вейль зрікся атомістичних теорій континууму, включно із своєю власною у Das Kontinuum. Відповідно до цього він вітав побудову Брауером континууму засобами послідовностей, породжених вільними актами вибору, ідентифікуючи його, таким чином, як "середовище вільного становлення", яке "не розкладається у множину дійсних чисел як завершених сутностей". Вейль відчув, що Браеур із його доктриною інтуїціонізму стояв ближче, ніж будь-хто інший, до замощування тієї "незамощуваної безодні" між інтуїтивними і математичними континуумами. Зокрема, він знаходив нездоланним той факт, що брауерівський континуум не є об'єднанням двох непорожніх частин, що не перетинаються – тобто він є нерозкладним. "Справжній континуум, – казав Вейль, – не можна поділити на окремі фрагменти". У пізніших публікаціях він виражав це колоритніше, цитуючи Анаксагора, що континуум "не піддається вирубуванню своїх частин сокирою".

§3. Конструктивна дійсна пряма і інтуїціоністський континуум

Початкова мотивація для розвитку конструктивної математики полягала в тому, щоб покласти ідею математичного існування на конструктивну або обчислювану основу. Задача вважається розв'язаною тільки тоді, коли можна, принаймні в принципі, дати явний розв'язок. Отож, наприклад, "Існує x таке, що $P(x)$" означає, що, принаймні в принципі, можна явно пред'явити x таке, що $P(x)$. Цей факт привів до піддання сумніву певних принципів класичної логіки, зокрема, закону виключеного третього, і створення нової логіки – інтуїціоністської. Він привів також до запровадження гострішого, ніж звичайно, означення дійсних чисел – конструктивних дійсних чисел. Конструктивне дійсне число – це послідовність раціональних чисел $(r_n) = r_1, r_2, \dots$ така, що для будь-якого k можна обчислити число n таким способом, щоб $|r_{n+p} - r_n| \leq 1/k$. Можна викласти аксіоми для конструктивної дійсної прямої. Якщо припускають класичну логіку, то конструктивний аналіз є категоричною теорією і тому ця пряма є єдиною моделлю. Проте в інтуїціоністській логіці для дедекіндових і канторових дійсних чисел можливо не бути ізоморфними всупереч тому факту, що вони є моделями конструктивного аналізу. У конструктивному аналізі дійсна пряма, по суті, є звуженням її класичного двійника. Натомість у брауерівського інтуїціонізму більш вільний погляд на справу, що приводить до значного збагачення арифметичного континууму порівняно із строгим конструктивізмом. Тут, як дійсні числа, допускаються не тільки нескінченні послідовності, визначені наперед ефективним правилом для обчислення їхніх членів, а й такі, у породженні яких відіграє роль вільний вибір. Останні називають *послідовностями (вільного) вибору.*

Хоча конструктивний аналіз формально не суперечить класичному аналізу і його фактично можна вважати підтеорією останнього, було запропоновано низку інтуїціоністськи правдоподібних принципів для теорії вибірних послідовностей, які віддаляють інтуїціоністський аналіз від класичного двійника. Одним із таких принципів є *принцип неперервності* Брауера: для заданого відношення $R(\alpha, n)$ між вибірними послідовностями α і числами n, якщо для кожного α можна визначити число n, для якого виконується $R(\alpha, n)$, то n можна визначити вже на основі знання скінченного числа членів α. Із цього можна виснувати слабку версію теореми про неперервність, а саме, що кожна функція з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ є неперервною. Ще одним таким принципом є певна форма *індукції* для добре ґрунтованих множин скінченних послідовностей. Брауер використав цю індукцію і принцип неперервності для доведення своєї теореми про неперервність, що кожна дійснозначна функція, визначена на замкненому відрізку, є рівномірно неперервною, з якої, як вже згадувалося, випливає, що інтуїціоністський континуум нерозкладний.

Брауер надав інтуїціоністській концепції математики явно суб'єктивного повороту, запроваджуючи *творчого суб'єкта*. Це певного сорту ідеалізований математик, для якого час поділено на дискретні послідовні стадії, протягом кожної з яких він може випробовувати різні твердження, намагатися будувати доведення, і так далі. Зокрема, завжди можна визначити, чи на стадії n творчий суб'єкт має доведення конкретного математичного твердження p. Хоча теорія творчого суб'єкта залишається суперечливою, її чисто математичні наслідки можна одержати одним простим постулатом, який цілком вільний від суб'єктивних і часових елементів.

Творчий суб'єкт дає нам змогу визначити для заданого твердження p двійкову послідовність $< a_n >$ умовою: $a_n = 1$, якщо творчий суб'єкт має доведення p на стадії n; $a_n = 0$ в іншому випадку. Тепер, якщо побудова цих послідовностей є єдиною користю від творчого суб'єкта, то посилання на останнього можна уникнути, постулюючи принцип, відомий під назвою *схеми Кріпке*:

Для кожного твердження p існує зростаюча двійкова послідовність $< a_n >$ така, що p виконується, якщо і тільки якщо $a_n = 1$ для деякого n.

Було показано, що ці принципи, взяті разом, мають чудові наслідки для нерозкладності підмножин континууму. Інтуїціоністський континуум є не тільки нерозкладним (тобто його не можна розбити на дві непорожні частини, що не перетинаються), але, припускаючи принцип неперервності і схему Кріпке, залишається нерозкладним, навіть якщо вколоти його булавкою. Інтуїціоністський континуум має, так сказати, подібну до сиропу, густу природу, так що не можна просто забрати геть одну точку. Якщо на додачу припустити згадану індукцію, то, що ще більш дивно, нерозкладність утримується навіть тоді, коли всі раціональні точки видалені з континууму.

Нарешті, було також показано, що в інтуїціоністській математиці можна розвинути природне поняття нескінченно малого ([Ve]). Тут ідея така, що нескінченно мале повинно бути "дуже малим" дійсним числом у тому розумінні, що невідомо, чи воно відрізнюване, тобто строго більше або менше, від нуля.

§4. Результати Ґеделя

Тут ми подамо розповідь про фундаментальні для математичної логіки та основ математики результати Ґеделя про повноту та неповноту формальних систем, а також про континуум-гіпотезу та аксіому вибору за [Kl]. Цікаве обговорення цих результатів див. також у [Ma].

1. Теорема про повноту (1930)

Починаючи від Фреґе традиційний предметно-предикатний аналіз структури висловлень був замінений гнучкішим використанням *пропозиційних функцій* або, коротше, *предикатів*. Використовуючи задану колекцію – або область D – об'єктів (ми називатимемо їх *індивідами*, якщо вони є первісними об'єктами, що не аналізуються) як множину значень незалежних змінних, одномісний предикат P або $P(a)$ над D (що називається також |it властивістю членів D) є функцією, що для кожного члена D як значення змінної a набуває своїм значенням твердження $P(a)$. Двомісний предикат Q або $Q(a,b)$ (що називається також *бінарним відношенням* між членами D) для кожної пари значень a і b із D набуває своїм значенням твердження $Q(a,b)$; і т.д. У найчастіше культивованій версії логіки (*класичній* логіці) кожне із тверджень, що приймають значеннями предикатів, є *істина* або *хиба*. *Обмежене* або *числення предикатів першого порядку* ("елементарна логіка") має справу із виразами, що називаються формулами, побудованими відповідно до сформульованих синтаксичних правил із: символів P, Q, R,... для предикатів; пропозиційних зв'язок $\neg$ ("не"), & ("і"), $\vee$ ("або") та $\to$ ("тягне", "імплікує"); та кванторів $\forall x$ ("для всіх x") і $\exists x$ ("існує x таке, що"). Наприклад, узявши P, Q, R як символи для предикатів одної, двох, трьох змінних відповідно, вирази $P(b)$, $Q(a,c)$, $R(b,a,a)$, $\forall x P(x)$, $\forall x \exists y Q(x,y)$, $\forall x((\neg P(x)) \to Q(a,x))$, та $\forall x((\exists y Q(y,x)) \to \neg R(x,a,x))$ є формулами.

У класичній логіці після будь-якого вибору непорожньої області D, як множини значень змінних, кожну формулу можна оцінити як істинну або хибну для кожного *приписування* в D предиката над D як значення або інтерпретації кожного з його предикатних символів і члена D як значення кожної з його "вільних" змінних. Його *вільні* змінні – це ті з "вільними" появами, де вони не піддаються дії кванторів. У сімох прикладах формул, заданих вище, вісім появ a, b, c вільні; п'ятнадцять появ x і y не вільні, тобто вони *обмежені.* Процес оцінювання прямий, приймаючи $\vee$ як нероздільне "або" ($A \vee B$ істинне, коли одне із A та B або обидва істинні, інакше хибне), і трактуючи $A \to B$ як $(\neg A) \vee B$. Наприклад, узявши за D невід'ємні цілі або *натуральні числа* $\{0, 1, 2, \ldots\}$, і приписуючи $P(a)$, $Q(a,b)$ і $R(a,b,c)$ предикати "a парне", "a менше ніж b" і "$ab = c$" , та a, b, c числа $0, 1, 1$ як значення, наші сім прикладів формул будуть відповідно хибною, істинною, істинною, хибною, істинною, істинною, істинною.

Логіка зосереджується на дослідженні, які формули виражають логічні істини, тобто є "істинними взагалі". Лейбніц говорив про істину у всіх можливих світах. Ми кажемо, що формула *значуща в* D (заданій непорожній області), якщо вона істинна для кожного приписування в D; і просто *загальнозначуща*, якщо вона значуща в кожній непорожній області D.

Шоб зробити міркування із численням предикатів практичним, паралельним до способу, яким ми фактично думаємо, ми не можемо зупинитися думати через процес оцінювання у всіх непорожніх областях для всіх приписувань кожного разу, коли ми хочемо переконатися, що формула логічно істинна (загальнозначуща). Замість цього використовуємо "аксіоматично-дедуктивний метод", за допомогою чого формули стають "довідними".

По-перше, певні формули визнаються *логічними аксіомами*. Наприклад, всі формули наступних двох видів – що називаються *схемами аксіом* – є аксіомами:

$$A \to (B \to A), \qquad \forall x A(x) \to A(a).$$

Тут A, B і $A(x)$ можуть бути будь-якими формулами, а x і a – будь-якими змінними; $A(a)$ – це результат підстановки змінної a замість вільних появ змінної x у формулі $A(x)$. Крім цього, вимагається, щоб результуючі появи a в $A(a)$ були вільними; отож, $\forall x \exists b Q(b, x) \to \exists b Q(b, a)$ – аксіома за схемою $\forall x A(x) \to A(a)$, проте $\forall x \exists a Q(a, x) \to \exists a Q(a, a)$ – ні. Схеми аксіом (і, зокрема, аксіоми, якщо маємо деякі не задані схемами) вибираються так, що кожна аксіома загальнозначуща.

По-друге, визнаються обставини, що називаються *правилами висновування*, в яких з одної або двох формул, показаних над лінією, що називаються *умовами*, можна *виснувати* формулу, що називається *висновком* і яка показана під лінією; наприклад:

$$\frac{A, \quad A \to B}{B}, \qquad \frac{C \to A(x)}{C \to \exists x A(x)}.$$

Тут A, B і $A(x)$ можуть бути будь-якими формулами, x – будь-якою змінною, а C – будь-якою формулою, що не містить вільної появи x. Правила висновування вибрані так, щоб, як тільки для заданої непорожньої області D і приписування в D істинні припущення, то для того самого D і приписування висновок був істинним. Звідси, якщо припущення загальнозначущі, то висновок загальнозначущий.

Доведення – це скінченний список формул, кожна з яких своєю чергою є або аксіомою або висновком висновування з одної або двох формул, що записані раніше у списку як припущення. *Доведення* є *доведенням* його останньої формули, яка називається *довідною*. В одному із класичних трактувань класичного числення предикатів першого порядку (Кліні) використовуються дванадцять схем аксіом і три правила висновування. В силу того, що ми щойно сказали про те, як вибрані схеми аксіом (або конкретні аксіоми) (отож, кожна аксіома загальнозначуща), і подібно для правил висновування (отож, істина переноситься вперед кожним висновуванням), *кожна довідна формула загальнозначуща*. Отож, аксіоматично-дедуктивне трактування числення предикатів коректне.

Але чи воно *повне*? Тобто: *Чи кожна формула, яка загальнозначуща, є довідна*?

Аксіоматично-дедуктивне трактування числення предикатів першого порядку, виділене з інших складніших логічних систем, було, можливо, вперше сформульовано явно у книзі Гільберта і Акермана (1928). Там вперше сформульована проблема повноти: "Чи система аксіом (і правил висновування) повна, так що фактично всі логічні формули, які правильні для кожної області індивідів, можна вивести з них, все ще залишається нерозв'язаним питанням."

Саме на це запитання відповів Ґедель у 1930р. Він встановив: *Для кожної формули A числення предикатів першого порядку A довідна в ньому або A не значуща в області* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ *натуральних чисел* (і тому не загальнозначуща).

Отож, *якщо A загальнозначуща*, то друга альтернатива Ґеделя виключена, і *A довідна*. Це відповідає на питання Гільберта і Акермана ствердно.

Говоритимемо, що формула A (або декілька формул одночасно) *задовольнювана* у даній області D, якщо A задовольняється (всі формули задовольняються), тобто робиться істинною деяким приписуванням в D. Тоді A-задовольнювана-в-D еквівалентно до $\neg A$-не має сили-в-D.

Тепер, *якщо A задовольнювана у деякій області D, то* $\neg A$ не має сили у цій області D, тому $\neg A$ не має сили, тому $\neg A$ не довідна (за правильністю числення предикатів), тому за результатом Ґеделя, застосованим до $\neg A$, $\neg A$ не має сили в $\{0, 1, 2, \ldots\}$, тому *A задовольнювана в* $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Це теорема Льовенгейма (1915).

Переформулюємо теорему повноти для $\neg A$: *Або $\neg A$* не має сили (тобто A *задовольнювана) в* $\{0, 1, 2, \ldots\}$*, або $\neg A$ довідна* (еквівалентно, суперечність можна вивести із A).

Ґедель розглянув також випадок нескінченної колекції формул $\{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ замість одної формули. Результат просто приходить з підстановки $\{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ замість A у попереднє твердження, і зазначаючи, що якщо суперечність виводиться із формул $A_0, A_1, A_2, \ldots$, то лише скінченне число їх може брати участь у даному висновуванні суперечності. Отож: *Або формули $A_0, A_1, A_2, \ldots$ одночасно задовольнювані в* $\{0, 1, 2, \ldots\}$*, або для деякої скінченної підмножини* $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\}$ *з них* $\neg(A_{i_1} \& \ldots \& A_{i_n})$ *довідна* (і звідси, загальнозначуща, тому $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ не є одночасно задовольнювані у будь-якій області).

Тепер, *якщо формули кожної скінченної підмножини* $\{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ *одночасно задовольнювані у відповідній області, то* друга альтернатива вище виключена, тому *всі формули одночасно задовольнювані* (цей результат називається "компактністю"), *насправді в області* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ (теорема Льовенгейма-Сколема). Сколем у 1920р., крім заповнення прогалини у міркуванні Льовенгейма (1915), додав випадок нескінченної кількості формул.

Ці результати про задовольнюваність, поєднані із теоремою про повноту у трактуванні Ґеделя, мають у певних випадках дивні наслідки, коли ми маємо намір використати колекцію формул як аксіом, щоб охарактеризувати математичну систему об'єктів. Роблячи так, формули не повинні бути логічними аксіомами, а радше математичними аксіомами, які заплановані бути істинними, для заданої області D та приписування предикатів над D предикатним символам, точно тоді, коли D і предикати мають ту структуру, яку ми хочемо, щоб система мала. Щоб застосувати процес оцінювання як і заплановано, припустимо, що аксіоми *замкнені*, тобто не мають вільних змінних.

Використовуючи символізм числення предикатів, щоб сформулювати математичні аксіоми, ми звичайно хочемо застосувати предикатний символ $E(a, b)$ з наміром виражати $a = b$. Тоді для нашого процесу оцінювання ми зацікавлені тільки у приписуваннях, що дають $E(a, b)$ значення $a = b$, тобто що роблять $E(a, b)$ істинним точно тоді, коли a і b мають значенням той самий член D. Додаючи деякі відповідні аксіоми до числення предикатів для цього випадку, дістають *числення предикатів першого порядку із рівністю.* Ґедель запропонував додаткове міркування, що пристосувало його трактування для числення предикатів до числення предикатів із рівністю, із "областю $\{0, 1, 2, \ldots\}$", заміненою у його висновках на "$\{0, 1, 2, \ldots\}$ або непорожню скінченну область".

Кантор у 1874р. встановив, що множина всіх підмножин натуральних чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$ (або множина множин натуральних чисел) є численнішою, або має *більше кардинальне число*, ніж множина натуральних чисел. Щоб пояснити це, оглянемо деякі поняття канторівської теорії множин. Він писав у 1895р.: "Під 'множиною' розуміємо будь-яку колекцію M визначених добре розрізнюваних об'єктів m нашого сприйняття або нашої думки (які називаються 'елементами' [або 'членами'] M) в одне ціле". Множина N є *підмножиною* множини M, якщо кожний член N є членом M. Наприклад, множина $\{0, 1, 2\}$ із трьома показаними членами має наступні 8 $(= 2^3)$ підмножини: $\{0, 1, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}, \{0, 1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{\}$. Кантор довів, що немає способу парування всіх множин натуральних чисел (тобто всіх підмножин натуральних чисел) із натуральними числами, так що одна підмножина спарована з 0, інша з 1, ще інша з 2, і т.д., причому кожне натуральне число використано точно раз. Множини мають *те саме кардинальне число*, якщо їх можна так спарувати одна з одною, або ж встановлено "взаємно-однозначну відповідність". Позначаючи кардинальне число натуральних чисел $\aleph_0$ і приймаючи $2^{\aleph_0}$ як позначення для кардинала множин натуральних чисел, отож, $2^{\aleph_0} \neq \aleph_0$. Але натуральні числа можна спарувати із підмножиною множин натуральних чисел (справді, з *одиничними множинами* $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, ..., кожна з яких має по одному члену), тому ми пишемо $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Множини, які є скінченні або мають кардинал $\aleph_0$, називаються *зліченними*, інші множини – *незліченними*. Дійсні числа (що відповідають точкам на прямій) мають той самий кардинал $2^{\aleph_0}$, що й множина натуральних чисел.

Мовчки припускалося для числення предикатів першого порядку (без або із рівністю), що дозволено тільки зліченну колекцію змінних і предикатних символів. Це тягне, що існує тільки зліченна колекція формул.

Тепер припустимо, що ми хочемо записати список формул $A_0, \ldots, A_n$ або $A_0, A_1, A_2, \ldots$ у численні предикатів першого порядку із рівністю, щоб вони служили як аксіоми, що характеризують множини у певній версії канторової теорії множин. Припускаючи, що аксіоми задоволені у певній області D ("множини" у тій версії канторової теорії множин) деяким приписуванням (зрозумілим у тій теорії), з теореми Льовенгейма-Сколема випливає, що вони задовольнювані також у зліченній області $\{0, 1, 2, \ldots\}$! (Це очевидно, що вони не задовольнювані у скінченній області.) Тобто можна так інтерпретувати аксіоми, що множина значень змінних в них утворює зліченну колекцію, всупереч теоремі Кантора, за якою підмножини $\{0, 1, 2, \ldots\}$ (які є серед множин для цієї теорії) утворюють незліченну колекцію. Це парадокс Сколема (1923). Він не є прямою суперечністю; він показує тільки те, що нам не вдалося охарактеризувати нашими аксіомами систему всіх множин для теорії Кантора, як ми хотіли.

Припустимо замість цього, що ми хочемо, щоб список формул $A_0, A_1, A_2, \ldots$ у численні предикатів першого порядку із рівністю служив як аксіоми, що характеризують систему натуральних чисел $0, 1, 2, \ldots$ Сколем у 1933 і 1934р. показав, що ми не можемо досягти в цьому успіху. Він побудував так звані "нестандартні моделі арифметики" – математичні системи, що задовольняють всі аксіоми $A_0, A_1, A_2, \ldots$ (або, насправді, всі формули, які істинні в арифметиці натуральних чисел), але з відмінною структурою (як кажуть математики, *неізоморфною* до натуральних чисел). Фактично, як, здається, вперше зауважив Хенкін у 1947р., існування нестандартних моделей арифметики є негайним наслідком частини про компактність теореми Ґеделя про повноту для числення предикатів із рівністю.

Перед тим, як дати доведення Хенкіна, зауважимо, що можна збільшити клас формул для числення предикатів першого порядку із рівністю, дозволяючи *індивідні символи* $i, j, k, \ldots$, які для будь-якого приписування в області D є заданими членами D як їхніми значеннями, і *функційні символи* $f, g, h, \ldots$, де, наприклад, якщо f є символом для двомісної функції, її інтерпретацією в будь-якому приписуванні є функція двох змінних, що пробігають D, і яка набуває значення в D. Приклади, які приходять в голову для систем аксіом для натуральних чисел, є 0 як індивідний символ (із числом 0 як його стандартною інтерпретацією), $'$ як одномісний функційний символ (що треба інтерпретувати як $+1$), та $+$ і $\times$ як двомісні функційні символи (для додавання і множення). Такі приєднання до символізму несуттєві. Ми могли би еквівалентно використовувати предикатні символи $Z(a)$, $S(a, b)$, $A(a, b, c)$ і $M(a, b, c)$, де $Z(a)$ приймається як істинний точно тоді, коли значенням a індивіда a є 0; $S(a, b)$, коли $a + 1 = b$; $A(a, b, c)$, коли $a + b = c$; і $M(a, b, c)$, коли $ab = c$. Тут "еквівалентно" означає, що будь-що, що можна виразити з використанням індивідних і функційних символів, можна перефразувати, використовуючи предикатні символи (але зі значною втратою зручності). Це показано у Гільберта і Акермана (1934) і Кліні (1952).

Тепер візьмемо запропонований список аксіом $A_0, A_1, A_2, \ldots,$ які істинні при інтерпретації системою натуральних чисел. Припустимо, що вони включають (або, якщо необхідно, додамо до них) аксіоми $\forall x(x' \neq 0)$ та $\forall x \forall y(x' = y' \to x = y)$. Тепер розглянемо замість нього список $A_0, \neg i = 0, A_1, \neg i = 0', A_2, \neg i = 0'', \ldots,$ де i – новий індивідний символ. Кожна скінченна підмножина цих формул істинна при інтерпретації i натуральним числом n, для якого $\neg i = 0^{(n)}$ (із n акцентами на 0) не знаходиться у підмножині. Тому за компактністю $A_0, \neg i = 0, A_1, \neg i = 0', A_2, \neg i = 0'', \ldots$ є одночасно задовольнювані. Легко зрозуміти, що задовольняюча система ізоморфна до системи, в якій 0,1,2,... є значеннями $0, 0', 0'', \ldots$ і значення i не є натуральним числом – нестандартна модель арифметики.

Ці ілюстрації показують силу теореми Ґеделя про компактність із її наслідками як інструменту у вивченні можливостей для аксіоматичного засновування різних математичних теорій. Фактично не тільки теорема Льовенгейма-Сколема була відома раніше від 1930р., але й було зауважено в ретроспективі, що компактність числення предикатів першого порядку можна вивести як легкий наслідок результату Сколема 1923р. Все ж ця можливість не була помічена самим Сколемом; насправді проблема повноти вперше була сформульована у Гільберта-Акермана (1928). Сколем працював із логікою радше інтуїтивно, ніж використовуючи явно описану множину аксіом і правил висновування. Трактування Ґеделем цієї проблеми було зроблене без знання Сколема (1922), якого Гільберт і Акерман не згадують, і було гострим, одержало компактність, і включало додатковий аргумент, щоб застосувати його до числення предикатів із рівністю.

2. Теорема про неповноту (1931)

Розвиток Кантором теорії множин, початий у 1874р., привів – починаючи з 1895р. – до відкриття парадоксів ним самим, Чезарі Буралі-Форті, Бертраном Расселом і Жулем Рішаром. Сформулюємо тут парадокс Рассела (про інші див. перший розділ та книгу Кліні). Рассел розглянув множину T всіх тих множин, які не є членами самих себе, яка, здається, підходила під означення Кантора множини, процитоване вище. Чи T є членом T? У символах, чи $T \in T$? Припустимо, що

$T \in T$; тоді за означенням T не $T \in T$ (у символах $T \notin T$) всупереч припущенню. Отож, за зведенням до суперечності $T \notin T$. Подібно, припускаючи $T \notin T$, дістаємо $T \in T$. Отож, виконуються $T \notin T$ і $T \in T$!

Поява парадоксів надала особливого імпульсу роздумам про основи математики поза тим, що вже були широкі переформулювання різних галузей математики у дев'ятнадцятому сторіччі. На середину 1920-х років виникли три головні школи, про які тут знову згадаємо, щоб краще зрозуміти досягнення Ґеделя.

Логістична школа була представлена Б. Расселом і А. Уайтхедом. Вона запропонувала перетворити математику в область логіки згідно із лейбніцевою (1666) концепцією логіки як науки, що містить ідеї та принципи, що лежать в основі всіх інших наук. Вони запропонували вивести математику із логіки, продовжуючи від роботи Фреґе, Дедекінда і Пеано. Щоб уникнути нових парадоксів, Рассел сформулював теорію типів (1908), у якій індивіди (або первісні об'єкти, які не піддаються аналізу) приписані до найнижчого типу 0, властивості індивідів (або одномісні предикати над типом 0) – до типу 1, властивості об'єктів типу 1 – до типу 2, і т.д. Досить визначена структура була припущена для всієї сукупності можливих означень об'єктів заданого типу. Дедукція на цій базі дуже великої порції існуючої математики була виконана в монументальних *Принципах Математики* (ПМ) Уайтхеда і Рассела у трьох томах (1910, 1912, 1913).

Ні одна з інших двох шкіл, *інтуїціоністів* і *формалістів*, не погоджувалась починати з логіки, щоб висновувати найпростіші частини математики такі як елементарна теорія натуральних чисел 0,1,2,... . Справді, можна довести, що математичні концепції на цьому рівні вже припущені у формулюванні логіки із теорією типів.

Інтуїціоністська школа походить від статті Брауера (1908), що критикує поширену "класичну" логіку і математику. Брауер доводив, що класична логіка і математика йдуть поза інтуїцію у трактуванні нескінченних колекцій як фактично існуючих. Як приклад, кожне із натуральних чисел 0,1,2,... є скінченним об'єктом; але немає останнього. Математики часто можуть встановити, що властивістю володіє кожне натуральне число n, за допомогою міркування, що включає роботу тільки із натуральними числами до певної точки, яка залежить від n (можливо, просто із числами $\leq n$). Отож, нескінченність є тільки *потенційною* нескінченністю (горизонт, всередині якого ми працюємо). З іншого боку, багато існуючої класичної математики має справу із нескінченними колекціями як завершеними або *актуальними* нескінченностями. Деякі міркування із натуральними числами використовують актуальну нескінченність; наприклад, застосування закону виключеного середнього, тобто що деяке натуральне число має певну властивість P або що це не виконується (тому кожне натуральне число має властивість не-P). Використання нескінченних колекцій як актуальних нескінченностей поширене у звичайній теорії дійсних чисел, представленими, скажімо, з використанням нескінченних десяткових дробів. Брауер у статтях, починаючи з 1918р. (висвітлено у Гейтінга 1971р.), запропонував подивитися, як далеко можна перерозвинути математику, використовуючи тільки методи, що він розглядав як виправдані інтуїцією: тобто методи, що використовують тільки потенційні нескінченності, а не актуальні. Брауер зміг піти досить далеко у цьому напрямі коштом суттєвої зміни предмета від класичної форми, типовим представником якої є класичний аналіз, який звикли застосовувати фізики.

Формалістична школа була започаткована Гільбертом у 1904р. Він розвинув її із низкою співробітників після 1920р. Гільберт погоджувався із інтуїціоністами, що більшість класичної математики йде поза інтуїтивну очевидність. Він розрізняв у математиці *дійсні* твердження, які мають інтуїтивний зміст, і *ідеальні* твердження, які не мають, але у класичній математиці приєднані до дійсних, щоб зробити математичні теорії простішими і вичерпнішими. Його дійсні твердження – це ті, що відповідають використанню нескінченності тільки потенційно, в той час як актуальна нескінченність включена в ідеальні твердження. Але радше ніж просто відмовитися від ідеальних частин математики, Гільберт мав іншу пропозицію.

Ми бачили, як числення предикатів першого порядку, після того, як логічні пропозиції виражені формулами у точно регульованій символічній мові, було організоване аксіоматично-дедуктивним методом. Уайтхед, Рассел і Гільберт пропонували зробити те саме для математики загалом, тобто для самих міцних порцій математики, позбавлених від парадоксів. Як ми бачили, Уайтхед і Рассел пропонували зробити все це логікою, але не просто логікою першого порядку, всередині якої повинна бути визначена математика. Замість цього Гільберт пропонував починати із математичних аксіом, а також і логічних аксіом. Це можна зробити у символізмі числення предикатів першого порядку або використовуючи числення предикатів другого порядку (із квантуванням властивостей індивідів) або численнями ще вищих порядків. У доведеннях в системі, одержаній додаваням математичних аксіом до логічного апарату числення предикатів першого порядку (або, як ми би назвали їх, "дедукції" логікою із математичних аксіом), ми досліджуємо формули, які істинні для кожної області D і приписування в D, що задовольняють ці аксіоми. Символічна мова вперше встановлена із точно визначеним синтаксисом (отож, класом *формул*), а потім точно визначеним поняттям *доведень* (починаючи із *аксіом*, логічних або математичних, і застосуванням *правил висновування*). Результат називають *формальною системою.* (Числення предикатів першого порядку, як описано вище, є формальною системою лише з логічними аксіомами.)

Для Уайтхеда і Рассела наша впевненість у результаті – дедукції математики всередині ПМ – повинна була спиратися на правильності логічних принципів, втілених у тій версії логіки, що охоплює теорію типів, із якої все решта виводиться.

Гільберт пропонував "формалізувати" ту чи іншу математичну теорію у формальних системах і сподівався продовжити це із всією математикою аж до деякої точки, позбавленої зустрічей із парадоксами. Типово формалізована математика буде частково ідеальною і тому не підтримуваною нашими інтуїціями. Потім він хотів подивится на такі системи ззовні. Формальна система, що бачиться просто як її структура (окремо від значень або припущених значень, виражених символами, які спрямовують практикуючого математика) є системою скінченних об'єктів: символи (із щонайбільше зліченно нескінченної колекції), скінченні послідовності символів (подібні до тих, що утворюють формули) і скінченні послідовності скінченних послідовностей символів (подібні до тих, що утворюють доведення). Тому є можливість застосування до вивчення формальної системи інтуїтивних методів міркування у дійсній частині математики (використовуючи тільки потенційні нескінченності), яку Гільберт назвав *фінітарною.*

Зокрема, Гільберт сподівався фінітарним міркуванням довести сумісність кожної із його формальних систем, тобто що ніякі два доведення в них не можуть закінчуватися парою суперечливих формул A і $\neg A$. Це би показало, що математика, як вона була розвинена класично і приєднуючи ідеальні твердження до дійсних, не потрапляє у проблеми. Отож, Гільберт пропонував дати певний сорт виправдання для культивування тих частин класичної математики, що інтуїціоністи відкидали. Математичнау дисципліну, у якій формальні системи (що часто втілюють ідеальну математику) вивчаються ззовні щодо їхньої структури (не приймаючи до уваги значення символів) як частина дійсної математики, використовуючи тільки фінітарні методи, Гільберт назвав *теорією доведень* або *метаматематикою*. Докладні висвітлення див. у Гільберта, Бернайса (1934, 1939) та Кліні (1952).

Тепер ми в стані зрозуміти результати Ґеделя. Зрозуміло, що маючи втілену певну частину математики у формальній системі, питання повноти постає просто, як ми бачили, для формальної системи числення предикатів першого порядку. Точніше, Ґедель розглянув формальні системи, подібні до тих із ПМ і систем, побудованих формалістами, що мали мету формалізувати принаймні стільки математики, як елементарна теорія натуральних чисел. (Формальна система, яка не робить цього, становила би радше малий інтерес для програм логіцистської і формалістської шкіл.) У такій системі твердження елементарної теорії чисел можна виразити замкненими формулами, тобто такими, що не містять вільних змінних. Повнота тоді означала би, що для кожної замкненої формули A або сама A або її заперечення $\neg A$ є довідною. Тобто щоб система була повною, доведення у цій системі повинні забезпечувати відповідь "так" (A довідна) або "ні" ($\neg A$ довідна) на будь-яке запитання про натуральні числа "Чи є твердження P істинне?" таке, що P можна виразити при запланованому значенні символів замкненою формулою A. Наприклад, зі змінними, що пробігають натуральні числа, якщо $A(x, y)$ – формула (лише із вільними змінними x і y), що виражає $x < y$, одна із двох замкнених формул $\forall x \exists y A(x, y)$ і $\neg\forall x \exists y A(x, y)$ повинна бути істинною – насправді перша є – і вона повинна бути довідною, якщо формальна система повна. *Відкриті* формули $\exists x A(x, y)$ і $\neg\forall x \exists y A(x, y)$ у звичайному використанні синонімічні із їхніми *замиканнями* $\forall y \exists x A(x, y)$ і $\forall y \neg\exists x A(x, y)$ і жодна з них не є істинною.

Перша теорема Ґеделя про неповноту (1931) – відома просто як теорема Ґеделя – говорить, що формальна система S, подібна до описаної, якщо правильна, є неповною. *В S немає замкненої формули G такої, що якщо в S тільки істинні формули довідні, то ні G, ні $\neg G$ не є довідною в S (хоча насправді при запланованій інтерпретації G істинна).*

Щоб сказати точніше про припущення правильності, приймемо до уваги форму G, яка є $\forall x A(x)$, де для інтерпретації запланованою множиною значень змінної x є натуральні числа. Тут $A(x)$ – формула із наступною властивістю. Підставимо в $A(x)$ замість вільних появ змінної x послідовно вирази (що називаються *цифрами*) $0, 0', 0'', \ldots, \mathbf{x}, \ldots$, які виражають натуральні числа $0, 1, 2, \ldots, x, \ldots$. Позначаємо цифру для x через $\mathbf{x}$ і записуємо результат підстановки як "$A(x)$". Для кожного x одна із формул $A(\mathbf{x})$ і $\neg A(\mathbf{x})$ довідна. Припущення правильності, яке зробив Ґедель, в тому, що ні для одної формули $A(x)$ і натурально-числової змінної x немає доведень в S всіх $A(0), A(1), A(2), \ldots, A(\mathbf{x}), \ldots$ і також $\neg\forall x A(x)$. Це припущення він назвав *ω-сумісністю. (Проста) сумісність* – це властивість, що ні для одної формули A немає доведень обох A і $\neg A$. Застосовуючи ω-сумісність до $\forall x A$, де x – змінна, що не з'являється вільно в A, ω-сумісність тягне просту сумісність. Переформульовуючи теорему Ґеделя із цією термінологією: *Якщо S ω-сумісна, то вона (просто) неповна, тобто існує замкнена формула G така, що ні G, ні $\neg G$ не є довідна в S (проте G істинна).*

Як це може бути? Фундаментальний факт полягає в тому, що працюючи із формальною системою (окремо від її інтерпретації), об'єкти, із якими ми маємо справу (символи із скінченної або зліченно нескінченної колекції, скінченні послідовності (появ) цих символів і скінченні послідовності таких скінченних послідовностей) утворюють зліченно нескінченну колекцію лінгвістичних об'єктів. Паруючи їх один-до-одного із натуральними числами або використовуючи деякий інший метод асоціювання різних натуральних чисел із ними (як зробив Ґедель), кожний об'єкт формальної системи представлений числом, що тепер називається *ґеделевим числом.* Тому насправді, оскільки формальна система S адекватна для певної частини елементарної теорії натуральних чисел, ми можемо виразити в S твердження, які ґеделевими числами фактично говорять речі про саму систему S. Ґедель винахідливо побудував своє G у вигляді $\forall x A(x)$, де $A(x)$ виражає "x не є ґеделевим числом доведення формули із певним фіксованим ґеделевим числом p" і p є ґеделевим числом самої формули G! Отож, G говорить "Кожний x не є ґеделевим числом мого доведення" або просто "Я недовідна". Тому, якщо би G була довідною, G була би хибною. Тому (припускаючи правильність) G недовідна; звідси (за тим, що говорить G) G істинна; і звідси (припускаючи правильність) $\neg G$ також недовідна. Легко підтвердити, що ω-сумісності достатньо як припущення правильності у висновку, що $\neg G$ недовідна, і просто сумісності у висновку, що G недовідна.

Ґеделева формула G, яка говорить "Я недовідна", є адаптацією давнього парадоксу *брехуна.* Крітянин Епіменід (6-е ст. до н.е.) сказав: "Крітяни завжди брехуни". Якщо би це була єдина річ, що сказав Епіменід, чи могло би це бути істинним? Чи хибним? Візьмемо версію Евбуліда (4-е ст. до н.е.) і припустимо, що особа каже: "Твердження, яке я тепер висловлюю, хибне". Якщо це твердження хибне, то за тим, що воно говорить воно істинне; і навпаки. Підстановка Ґеделем "недовідний" замість "хибний" уникає парадоксу, тому що твердження і його заперечення обидва можуть бути недовідними (в той час як вони обидва не можуть бути хибними).

Теорема Ґеделя була поліпшена у двох відношеннях. Россер (1936р.), використовуючи трошки складнішу формулу, ніж ґеделева G, замінив припущення ω-сумісності припущенням простої сумісності. Інше поліпшення, що пояснюється нижче, пов'язане із розвитком, який мав місце незалежно від Ґеделя (1931) і є так само важливим.

Принаймні від Евкліда у 4 ст. до н.е. математики визнали, що для деяких функцій і предикатів вони мають "алгоритми". *Алгоритм* – це процедура, описана наперед, така, що як тільки вибрано значення для змінної або відповідне значення для кожної змінної даної функції (або предиката), процедура застосується і дасть змогу за скінченну кількість кроків знайти відповідне значення функції (або вирішити істинність чи хибність відповідного значення предиката).

У 1930-х роках загальна концепція "алгоритму" була уважно вивчена і Черч у 1936р. запропонував відому тезу ("теза Черча" або "теза Черча-Тюрінґа"). Вона стверджує, що всі функції натуральних числових змінних, для яких є "алгоритми", або у фразеології Черча є "ефективно обчислювані", належать до певного класу таких функцій, для яких протягом 1932-34рр. були сформульовані два еквівалентні точні описи. Тюрінґ у 1937р. незалежно від Черча прийшов до того самого висновку, використовуючи третє еквівалентне формулювання, а саме функції, обчислювані ідеалізованою обчислювальною машиною (вільною від помилок і без обмежень на кількість її ємності чи "пам'яті") певного сорту, що називається тепер "машиною Тюрінґа". Теза застосовується до предикатів, тому що предикат можна зобразити функцією, що набуває значення 0, коли значення предиката істинне, і 1, коли хибне.

Як писав Тюрінґ (1937р.): "досягаються висновки, які поверхнево подібні до висновків Ґеделя у 1931р." Ґедель показав існування у певних формальних системах S "формально невирішуваних тверджень", тобто тверджень, для яких система S не вирішує істинності чи хибності, продукуючи доведення A або $\neg A$, де A – формула, що виражає твердження у символізмі S. Черч (1936) і Тюрінґ (1937) показали існування "інтуїтивно невирішуваних предикатів", тобто предикатів, для яких немає "процедури вирішення" або "ефективного процесу" або "алгоритму", яким для кожного значення змінної можемо вирішити, чи результуюче твердження істинне чи хибне.

У 1936, 1943, 1952рр. Кліні встановив зв'язок між цими двома розвитками. Фундаментальною метою використання формальних систем (як вдосконалення аксіоматично-дедуктивного методу, що прийшов до нас від Піфагора і Евкліда з 6-4 ст. до н.е.) є усунення всієї непевності про те, які твердження виконуються у даній математичній теорії. Щоб формальна система служила цій меті, мусить бути алгоритм, яким ми можемо визнати, коли маємо перед собою доведення у системі. Крім того, щоб система служила як формалізація даної теорії, ми мусимо мати для тверджень, в яких ми зацікавлені, алгоритм, щоб ідентифікувати формули в системі, що виражають ті твердження. Звичайно, можна почати із формул системи, якщо вони мають незрозумілу інтерпретацію, і взяти як наш клас тверджень ті, що виражені формулами. Для формалізації теорії натуральних чисел, використовуючи ґеделеву нумерацію формул і доведень, алгоритми можуть бути для теоретико-числових функцій і предикатів, тому можна застосувати тезу Черча-Тюрінґа.

Повторимо коротко, що за першою теоремою про неповноту (1931) ніяка із знайомих формальних систем (подібних до "Принципів Математики") і за узагальненою версією (Кліні) ніяка можлива формальна система не може бути правильною і повною для елементарної теорії натуральних чисел.

Нагадаємо, що недовідність G випливає із припущення, що S просто сумісна. За ґеделевою нумерацією властивість простої сумісності S можна виразити в самій S формулою, назвемо її "Concis". І фактично міркування, яким Ґедель показав, що "Проста сумісність тягне, що G недовідна" можна сформулювати всередині S як доведення формули

$$\mathrm{Concis} \to G,$$

зауважуючи, що G говорить "G недовідна"! Тому, якщо би Concis була довідною в S, одним застосуванням правила висновування, показаним вперше вище, G була би, всупереч першій теоремі про неповноту, якщо S сумісна. Тому маємо другу теорему Ґеделя про неповноту (1931р.): *Якщо S просто сумісна, то формула* Concis, *яка виражає цей факт, недовідна в S.*

Ідеєю Гільберта було довести сумісність підходящої формальної системи S математики фінітарними методами. У цікавому випадку, що S є формалізацією, що охоплює деяку ідеальну (нефінітарну) математику, методи, які повинні бути використані у доведенні її сумісності, не повинні включати всі ті методи, які формалізовані в S. Друга теорема Ґеделя показує, що навіть всіх методів, формалізованих в S, не було би достатньо!

Наслідком цього є те, що якщо ідею Гільберта можна виконати, це не можна зробити так просто, як сподівалися. Повинні бути прийняті такі методи як фінітарні і використані у доведенні сумісності системи S, які не є формалізовні в S. Справді, це було зроблено для арифметики натуральних чисел Ґентценом (1936), Акерманом (1940), і для аналізу (теорії дійсних чисел) Спектором (1961).

Із двома теоремами про неповноту вся робота в основах математики була глибоко змінена. Ми описали відомі результати Ґеделя у контексті точки зору на основи на той час. Зрозуміло, що він звертався – і розв'язував – існуючі на той час проблеми. Кожний із цих результатів можна роз'яснити, як кусок точної математики: на рівні класичної теорії чисел або фінітарної теорії чисел. Картина, яку математики могли би приймати до уваги для використання формальних систем, була перефокусована відкриттями Ґеделя. Тепер ми знаємо, що їхнє використання не може дати розв'язку основоположних проблем математики так просто, як сподівалися. Проте формальні системи не перестануть бути справою математиків. Звернення за допомогою до аксіоматично-дедуктивного методу, поліпшеного у нинішні часи до формальних систем, забезпечує математиків засобами, щоб бути повністю явними щодо того, що вони роблять, і точно які припущення вони використовують у даній теорії. Важливо мати цю явність, коли вони займаються осягненням нових методів (як показує перша теорема Ґеделя, вони це мусять для прогресу) і намаганням переконати себе у їх надійності (що за другою теоремою Ґеделя не можна зробити просто математичними застосуваннями тих самих методів).

Крім того, Ґедель у 1934р., спираючись на пропозицію Гербрана, запровадив поняття "загальних рекурсивних функцій". Це одне із двох еквівалентних понять, які були ототожнені із "ефективною обчислюваністю" за тезою Черча. Щодо цих понять і третього (Тюрінґа) та їхніх узагальнень розвинена широка математична теорія, яка застосовується до інших галузей математики (див. Кліні, 1981р.). У статті 1931р. Ґедель пояснив, як деякі невирішувані твердження стають вирішуваними із додаванням змінних вищих типів; при цьому, звичайно, можна описати інші невирішувані твердження. У глибокій статті 1935р. він показав, що у системах із змінними вищих типів нескінченно багато попередньо довідних формул набувають значно коротших доведень.

Інтуїціоністська школа Брауера визнала переваги формалізації для того, щоб зробити явними межі даної теорії. Так, Гейтінґ у 1930р. запропонував формалізацію інтуїціоністської логіки і порції інтуїціоністської математики. Це мало різноманітні математичні застосування. Статті Ґеделя у 1932р. були важливими для вивчення цих систем.

Статті Сморинського, а також Паріса і Харрінґтона (1977р.), Доусона (1979) можуть слугувати як зразок еха від теорем про неповноту після майже п'ятидесяти років. Цікаво також, що знайдено математично значущі недовідні твердження, на відміну від штучної формули G Ґеделя.

3. Доведення відносної сумісності для аксіоми вибору і узагальненої континуум-гіпотези.

Як зазначалося, у канторовій теорії множин множина множин натуральних чисел і множина дійсних чисел мають кардинальне число $2^{\aleph_0}$, більше ніж кардинальне число $\aleph_0$ множини натуральних чисел, яке є найменшим нескінченним кардиналом.

У теорії Кантора кардинальне число $\aleph_1$, наступне більше за $\aleph_0$, ототожнюється із кардиналом множини всіх можливих лінійних впорядкувань натуральних чисел, у яких кожна їхня підмножина має перший елемент у цьому впорядкуванні ("цілковита упорядкованість"). Канторова теорія множин була би значно спрощена, якщо би $2^{\aleph_0}$, який є нескінченним кардиналом, більшим ніж $\aleph_0$, що приходить першим в голову, фактично є наступним більшим кардиналом. Кантор припустив у 1878р., що так і є, тобто $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Це припущення називається "континуум-гіпотезою" (КГ); і це стало центральною проблемою теорії множин підтвердити або спростувати КГ. Шістдесят років пізніше, при все ще нерозв'язаній проблемі, результати Ґеделя у 1938-39рр. пролили на справу нове світло.

Використовуючи канторові *порядкові числа (ординали)*, всі нескінченні кардинали можна перелічити за порядком їхніх величин:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\alpha, \ldots,$$

де α пробігає натуральні числа як скінченні ординали, а потім нескінченні ("трансфінітні") ординали. "Узагальнена континуум-гіпотеза" (УКГ) полягає в тому, що для кожного ординала α $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, де $2^{\aleph_\alpha}$ – кардинал множини всіх підмножин множини кардинала $\aleph_\alpha$.

Після того, як з'явилися парадокси, теорія множин була аксіоматизована. Це полягало у виписуванні колекції аксіом, що розглядалися як істинні твердження про множини, включаючи аксіоми, що забезпечують існування багатьох множин, але не дуже "диких" множин, таких, що привели до парадоксів. (Нагадуємо парадокс Сколема про такі системи аксіом у логіці першого порядку.) Як стандартний список аксіом для теорії множин приймемо ті, що звичайно називаються аксіомами Цермело-Френкеля. Вони виникли з першої аксіоматизації Цермело у 1908р., використовуючи уточнення, запропоноване Френкелем у 1922р. Одна із аксіом, що називається "аксіомою вибору" (АВ), розглядалася як менш природна, ніж інші. Одна з її форм говорить, що якщо ми маємо колекцію S непорожніх множин, ніякі дві з яких не мають спільного члена, то існує "вибіркова множина" C, що містить точно по одному члену із кожної множини в колекції S. Під ZFC розуміємо всі аксіоми Цермело-Френкеля, а під ZF – систему цих аксіом без АВ.

Кантор не думав про своє припущення $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (КГ) відносно деякої множини аксіом. Але після вибору аксіоматизації, скажімо ZF, є три можливості: (1) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ довідна (використовуючи елементарну логіку) із аксіом; (2) $\neg(2^{\aleph_0} = \aleph_1)$ довідна із аксіом; (3) ні (1), ні (2). Це припускаючи, що аксіоми сумісні, так що не: (4) Обидві (1) і (2).

Те, що зробив Ґедель, полягало у виключенні (2); він показав, що приєднання $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ до аксіом не приведе до суперечності (якщо суперечність вже не була вивідна із аксіом без приєднання).

Говорячи найпростішими термінами, Ґедель, використавши тільки факти про множини, виправдані аксіомами ZF, визначив клас L множин, які він назвав "побудовними множинами", такий, що всі аксіоми істинні, коли "множини" для них беруться просто побудовними множинами L. В результаті L утворює певний сорт скелетної моделі теорії множин – не всі множини, ймовірно, заплановані, але їх все ще достатньо багато, щоб зробити всі аксіоми істинними. І в цій моделі АВ і КГ і насправді УКГ всі є істинними.

Зауважуючи, що у цьому міркуванні нічого не використано про множини з L, що не може бути базовано на аксіомах ZF, його можна перетворити, як слідує далі, у доведення того, що якщо ZF (взята як формальна система із математичними аксіомами ZF і логічними аксіомами і правилами висновування числення предикатів першого порядку) є (просто) сумісною, то такою є і ZF+АВ+УКГ (взята подібно). Припустимо, що ZF сумісна і (всупереч тому, що ми хочемо довести), що пара суперечливих формул A і $\neg A$ (які можна взяти замкненими) довідні в ZF+АВ+УКГ. Нехай B^L походить з будь-якої замкненої формули B заміною кожної частини вигляду $\forall xC$ на $\forall x(x \in L \to C)$ і кожної частини вигляду $\exists xC$ на $\exists x(x \in L \& C)$, в результаті обмежуючи змінну x до зміни над L. Тут $x \in L$ визначуване всередині ZF. Тепер для аксіом $A_0, A_1, A_2, \ldots$ ZF+АВ+УКГ можемо довести в ZF $A_0^L, A_1^L, A_2^L, \ldots$, а потім продовжити за міркуванням, що дало суперечність A і $\neg A$ в ZF+АВ+УКГ, щоб дістати суперечність A^L і $\neg A^L$ в ZF, всупереч нашому припущенню, що ZF сумісна. Отож, Ґедель дав доведення сумісності для ZF+АВ+УКГ відносно ZF.

Природно запитати, чи можна також виключити (1), тобто чи заперечення $\neg 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ континуум-гіпотези можна додати сумісно до ZF або насправді ZFC (за умови, що ZF сумісна). Це зробив Пол Коен у 1963р. Він здійснив це, використовуючи інший метод (відмінний від ґеделевого), у якому всі аксіоми ZFC, а також $\neg 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ виконуються. Про доведення Коена див. §3.

Отож, поєднуючи результати Ґеделя і Коена, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ незалежне від ZFC. Подібно, поєднуючи результати Ґеделя і Коена, АВ незалежна від ZFC. Ці результати ввели нас у цілком нову еру теорії множин, у якій маса проблем сумісності або незалежності різних припущень відносно тієї чи іншої множини аксіом досліджується побудовою моделей.

У статті 1946р., опублікованій у 1965р., Ґедель запропонував неконструктивне розширення формальних систем або поняття "демонстровності", яке повинно одержуватися, використовуючи все сильніші і сильніші "аксіоми нескінченності", які стверджують існування великих кардинальних чисел у теорії множин. Він писав: "Це не є неможливо, що для такого поняття демонстровності виконувалась би деяка теорема про повноту, яка говорила би, що кожне твердження, яке можна виразити у теорії множин, вирішуване із сучасних аксіом плюс деяке істинне твердження про величину універсуму всіх множин." Там є і подібна пропозиція щодо поняття математичної "визначуваності".

§5. Гіпердійсні числа

Як тільки континуум було забезпечено теоретико-множинною основою, від використання нескінченно малих у математичному аналізі у великій мірі відмовились. І ситуація залишалася такою низку років. Перші знаки відродження нескінченно малого підходу до аналізу виплили на поверхню у 1958 р. у статті німецьких математиків А. Логвіца і К. Шмідена. Але головний прорив стався у 1960 р., коли математичному логікові Абрахаму Робінсону (1918-1974) прийшло в голову, що "поняття і методи сучасної математичної логіки здатні забезпечити підходящі рамки для розвитку диференціального і інтегрального числення засобами нескінченно малих і нескінченно великих чисел". Ця ідея, розроблена на основі нестандартних моделей множини цілих чисел Т. Сколема (1927 р.), теореми компактності Мальцева (1936 р.) та побудови нестандартної моделі множини дійсних чисел Е. Х'юітом (1948 р.), привела до створення *нестандартного аналізу*, що Робінсон вважав його реалізацією лейбніцевої концепції нескінченно малих і нескінченних як ідеальних чисел, що володіють тими самими властивостями, що й звичайні дійсні числа.

Після початкової ідеї Робінсона було розвинено низку способів подачі нестандартного аналізу. Сам Робінсон підійшов до питання радше як логік, а не аналітик. У 1963 р. американський математик В. Люксембург запропонував ультрафільтровий підхід для неспеціалістів у логіці, у 1977 р. американець Е. Нельсон – аксіоматичну теорію внутрішніх множин. Лише у 1988 р. швед Т.Ліндстрем виклав аналітичний підхід. Між цим, звісно, з'являлись і підручники з цієї нової дисципліни для студентів-математиків, зокрема, Робінсона і Закона, Харда і Лоеба, Стройяна і Люксембурга, Кіслера, Альбеверіо та ін.

Ми тут подамо тільки ідею побудови множини гіпердійсних чисел як деякої фактор-множини на основі поняття нетривіального ультрафільтра. Побудова множини гіпердійсних чисел $^*\mathbb{R}$ з $\mathbb{R}$ аналогічна до канторової побудови $\mathbb{R}$ з $\mathbb{Q}$. Гіпердійсні числа виникають як класи еквівалентності дійснозначних послідовностей (тобто множини $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$), і виклик полягає просто у знаходженні для таких послідовностей відношення еквівалентності, яке дає потрібний результат. Фактично це забезпечується побудовою *нетривіального ультрафільтра* U на множині натуральних чисел за допомогою *аксіоми вибору*. Викладемо спрощено цю побудову. Розглянемо множину всіх підмножин множини $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{l}
2^{\mathbb{N}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, ..., \{1,2\}, \{1,3\}, ..., \{1,2,3\}, ..., \{n_1, n_2, ..., n_m\}, ... \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \searrow \\
\{1,3,5,7,...\}, \{2,4,6,8,...\}, ... \\
\swarrow \qquad\qquad\qquad \searrow \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\{3,6,9,...\}, \{1,2,4,5,7,8,...\}, ... \\
\downarrow \qquad\qquad\qquad \searrow \qquad\qquad\qquad \swarrow \\
\{10,100,1000,...\}, \{1,...,9,11,...,99,101...\}, ..., \{1,2,3,...\}\}.
\end{array}$$

(це *не список*; напрям стрілок і крапок вказує на незліченність множини). Побудову U почнемо, взявши всі множини зі скінченними доповненнями (до $\mathbb{N}$). Такі множини називаються ***кофінітними*** і утворюють зліченну множину із властивістю скінченного перетину. Тепер будемо розглядати попарно множини A і $\mathbb{N} - A$, які ще не потрапили до U, і приєднувати до U одну з них, наприклад, з непарних і парних чисел – $\{1, 3, 5, 7, ...\}$, а також всі перетини цієї множини із всіма, які вже включені до U, і всі ширші множини. Знову одержимо зліченну множину. Потім розглядаємо іншу пару – наприклад, числа кратні 3 та всі інші, беремо до U одну з них, приєднуємо всі перетини і надмножини і т.д. Нескладно довести, що такий вибір завжди можна зробити із збереженням властивості скінченного перетину. Перебір завершиться за c "кроків" і за припущення континуум-гіпотези ($c = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$) на кожному кроці приєднується злічення кількість множин . Отож, ми могли "побудувати" U 2^c способами, тобто потужність множини нетривіальних ультрафільтрів є максимально можливою в тому розумінні, що її потужність така сама, як потужність множини всіх підмножин множини $2^{\mathbb{N}}$.

Тепер на множині $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ визначимо відношення еквівалентності так:

$$(x_n) \sim (y_n) \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N}: \ x_n = y_n\} \in U.$$

Легко перевірити, що це справді відношення еквівалентності. Позначають ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$. Якщо клас еквівалентності стаціонарної послідовності $(r, r, r, ...)$ ототожнити зі звичайним дійсним числом r, то можна вважати, що $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$. Це включення строге, бо побудована множина містить нові елементи. Наприклад, нескінченно велике число – клас послідовності $(1, 2, 3, ..., n, ...)$, а клас $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...)$ є нескінченно малим. Всі нескінченно великі натуральні числа за абсолютною величиною не менші від потужності континууму. Операції додавання і множення для нових чисел визначаються покомпонентно:

$$(\tilde{x}_n) + (\tilde{y}_n) := (x_n \tilde{+} y_n), \quad (\tilde{x}_n) \cdot (\tilde{y}_n) := (x_n \tilde{\cdot} y_n).$$

При цьому побудована множина зберігає всі властивості упорядкованого поля, але не є повною (!) у звичайному розумінні.

Зазначимо, що тут подано ультрафільтрову побудову за Люксембургом, а перша побудова ${}^*\mathbb{R}$ Е.Х'юіта у 1948р. була здійснена як деякий фактор на множині неперервних функцій. Підхід А.Робінсона (1961р.) був у рамках теорії моделей математичної логіки. Викладення нестандартного аналізу, модифікованого за Люксембургом (див. [Д]), і аксіоматичний опис ${}^*\mathbb{R}$ Кейслером [Ке] дають змогу ефективно застосовувати нестандартні методи у математичному аналізі. У 1977р. Е.Нельсон запропонував найвідоміший тепер **аксіоматичний підхід** ([N]) до викладення нестандартного аналізу, який зручний для вивчення просунутих розділів аналізу, топології та інших галузей математики. Про застосування нестандартних методів до математичної фізики та стохастичного аналізу див. [А-Л].

Подамо **аксіоми IST**– теорії внутрішніх множин (подробиці див. в [N] або [K]), які додаються до аксіом теорії множин Цермело-Френкеля разом із аксіомою вибору ZFC. В IST з'являється новий невизначуваний предикат "стандартний".

Нехай $F(x)$ – стандартний предикат із одною вільною змінною.

Перенесення. *Якщо $F(x)$ істинний для всіх стандартних множин x, то $F(x)$ істинний для всіх внутрішніх множин x, або коротше*

$$(\forall^{st} x) \ F(x) \implies (\forall x) \ F(x). \tag{T}$$

Нехай $B(x, y)$ – внутрішній предикат (це означає, що при його складанні не використовується слово "стандартний") із двома вільними змінними x, y.

Ідеалізація. *Якщо для кожної стандартної скінченної множини z існує стандартна множина x така, що $B(x, y)$ істинний для всіх $y \in z$, то існує внутрішня множина x така, що $B(x, y)$ істинний для всіх стандартних y, або коротше*

$$(\forall^{st\,fin} z)(\exists^{st} x)(\forall y \in z)\ B(x, y) \implies (\exists x)((\forall^{st} y)\ B(x, y). \qquad (I)$$

Нехай x – стандартна множина, а $F(z)$ – зовнішній предикат із одною вільною змінною z.

Стандартизація. *Для кожної стандартної множини x існує стандартна множина y така, що стандартна множина z є елементом y тоді і тільки тоді, коли $z \in x$ і істинний $F(z)$, або коротше*

$$(\forall^{st} x)(\exists^{st} y)(\forall^{st} z)(z \in y \ \leftrightarrow\ z \in x \wedge F(z)). \qquad (S)$$

Збільшену систему $^*\mathbb{R}$ (потужності континууму) можна розглядати просто як стандартну систему $\mathbb{R}$, що бачиться через нові математичні "окуляри", роздільна здатність яких достатня, щоб відкрити присутність ідеальних елементів серед стандартних. Вона все ще є дискретною структурою, складеною із "відрізнюваних" елементів. Нестандартна модель $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^A/_\sim$ множини $\mathbb{R}$ може мати як завгодно велику потужність, за рахунок вибору множини A. Однак неможливо зафіксувати канонічну множину $^*\mathbb{R}$ гіпердійсних чисел раз і назавжди; при вивченні проблем функціонального аналізу і топології бувають потрібні як завгодно потужні моделі. З технічної точки зору ця відсутність єдиності має дуже мало або взагалі не має наслідків, однак якщо хтось більше стурбований філософськими питаннями і хоче інтерпретувати $^*\mathbb{R}$ як аналітичну модель геометричної прямої, то це трохи тривожить. Можливе розв'язання цієї проблеми, запропоноване Фенстадом, таке: *вважатимемо геометричну пряму основним геометричним об'єктом, який містить точки, але який не можна ототожнювати ні з якою колекцією точок* (див. [L]). Крім того, можлива відповідь на запитання, про яку геометрію тут йдеться, стане зрозумілою при розгляді сюрреальних чисел.

§6. Гладкий інфінітезімальний аналіз

Ще одне досягнення у відродженні поняття нескінченно малого мало місце у сімдесятих роках із виникненням *синтетичної диференціальної геометрії*, відомої також як *гладкий інфінітезімальний аналіз* (ГІА). Ґрунтуючись на ідеях американського математика Лоувера і застосовуючи методи теорії категорій, ГІА забезпечує образ світу, в якому неперервне є автономним поняттям, що не пояснюється в термінах дискретного. Він забезпечує строгі рамки для математичного аналізу, у якому кожна функція між просторами є гладкою (тобто диференційовною довільне число разів, і тому, зокрема, неперервною) і в якому використання границь в означенні основних понять аналізу замінене *нільпотентними нескінченно малими*, тобто кількостями такими малими (але фактично не нулями), що деякий степінь – найкорисніше квадрат – зникає. Оскільки тут всі функції неперервні, цей аналіз дивним способом втілює принцип неперервності Лейбніца *Природа не робить* *стрибків*. "Внутрішня" логіка ГІА є інтуїціоністською. Декілька слів про моделі ГІА. Це є так звані гладкі топоси, категорії певного сорту, у яких всі звичайні математичні операції можна виконати, але внутрішня логіка яких є інтуїціоністською і в яких кожне відображення між просторами є гладким. Саме ця "універсальна гладкість" робить можливою присутність таких нескінченно малих об'єктів, як нільпотентні мікрокількості. Побудова гладких топосів ([MR]) гарантує сумісність ГІА із інтуїціоністською логікою. Це так, незважаючи на той факт, що ГІА несумісний із класичною логікою.

§7. Метод вимушення (форсинґ) Коена

Подані вище побудови вказують на сумісність (узагальненої) континуум-гіпотези із теорією ZFC. Тепер подамо скорочений і спрощений опис методу вимушення (форсинґу) Коена, що доводить сумісність заперечення континуум-гіпотези із іншими аксіомами ZFC, за [Ch]. Повне викладення самим Коеном із суттєвими зауваженнями А.Есенина-Вольпина див. у [Ко].

1. Моделі ZFC

Найбільш відомою теоремою, доведеною з використанням форсинґу, є незалежність континуум-гіпотези (CH). Точніше, Коен довів, що якщо ZFC сумісна, то CH не є теоремою ZFC. Раніше Ґедель довів, що якщо ZFC сумісна, то ¬CH, заперечення CH, не є теоремою ZFC (використавши свою концепцію "побудовних множин"). Як доводиться такий результат? На дуже високому рівні структура доведення є такою, як і очікується: записують дуже точне твердження того, що є аксіомами теорії множин (ZFC) і чим є ¬CH. Ця структура називається "моделлю" аксіом. Хоча термін "модель" не часто зустрічаємо у математиці поза формальною логікою, він фактично є знайомою концепцією. Наприклад, у теорії груп "моделлю теоретико-групових аксіом" є просто група, тобто множина із бінарною операцією, що задовольняє таке і таке.

Аналогічно можна запровадити термін – скажімо, "універсум" – що означає "-структура, яка є моделлю ZFC". Потім можна розпочати курс із теорії множин із означення типу такого: " "універсум" – це множина M разом із бінарним відношенням E, що задовольняє таке і таке", за яким йде довгий список аксіом таких як

> Якщо x і y – різні елементи M, то або існує z в M таке, що zEx, але не zEy, або існує z в M таке, що zEy, але не zEx. (Це є "аксіома екстенсіональності".)

[Зауваження: Так сталося, що термін 'універсум" не є стандартним; із деяких причин є стандартне ім'я для *аксіом*, але немає для *структур, що задовольняють аксіоми*, хоча у решті математики це навіть навпаки. Але суть правильна.]

У теорії груп швидко дають багато прикладів груп. Тут ми зустрічаємо першу жахливу рису ZFC; говорячи строго, ніхто ніколи навіть не пред'явив "одної" моделі ZFC (без використання припущень, які не є загальноприйнятими серед математиків)! Крім того, друга теорема Ґеделя про неповноту по суті говорить, що ніхто ніколи і не пред'явить.

На щастя, ця проблема не є такою складною, як це може спершу видатися. Наприклад, одним із об'єктів, що майже є моделлю ZFC, є V – клас всіх множин. Якщо взяти $M = V$ і прийняти, що E означає "є членом", то бачимо, що аксіома екстенсіональності просто говорить, що дві множини рівні, якщо і тільки якщо вони містять одні і ті самі елементи – очевидно істинне твердження. Решта аксіом ZFC подібним чином є самоочевидними, коли $M = V$. Хитрість, звичайно, в тому, що V є занадто великою, щоб фактично бути *множиною*, а ми ставили вимогу, що M мала бути множиною.

Крім того, незважаючи на ґеделеву неповноту, ніхто ніколи не довів, що *немає* будь-яких моделей ZFC, тому якщо ми стурбовані цією справою, можемо трактувати існування моделей ZFC подібно до будь-яких недоведених гіпотез, таких як гіпотеза Рімана або $P! = NP$. Тобто можна вільно припускати це так довго, поки ми пам'ятаємо про накладання в наших теоремах додаткової умови. Отож, відтепер припускатимемо, що моделі ZFC існують.

Другим можливим каменем спотикання є те, що деякі люди початково підходять до аксіоматичної теорії множин із сподіванням, що ми повинні усунути всі наші попередні забобони про множини. Тому може видатися дивним, що тут запропоновано початок обговорення, говорячи: ""Універсум" – це *множина* разом із ..." Зачекайте хвилинку – що таке множина? Чи немає циркулярності у визначенні аксіом для множин в термінах множин?

Різні люди дають різні відповіді на це запитання. Рекомендація може бути така: підходити до вивчення ZFC подібно до вивчення будь-якого іншого математичного предмета. Зокрема, потрібно використовувати звичайне, "наївне" математичне знання про множини, щоб зрозуміти речення ""Універсум" – це *множина* разом із ..." Не виношуйте сподівань, принаймні спочатку, що ZFC розкаже, чим "справді є" множини або які математичні практики є "справді строгими". Якщо це допомагає, думайте про ZFC як про аксіоми для "теорії універсуму", а не "теорії множин"; тоді явна циркулярність зникне.

Наступна проблема: у теорії груп найглибші теореми не є теоремами про *всі* групи, а про спеціальні класи груп (скінченні прості групи, компактні групи Лі і т.ін.). Подібно у теорії форсинґу ми будемо зацікавлені в моделях ZFC із певними додатковими властивостями. Першою властивістю, яку ми вимагаємо, є те, що елементи M будуть "добре-заснованими множинами". Це означає множинами, які побудовані рекурсивно із порожньої множини, використовуючи операції такі, як об'єднання, парування, степенева множина і т.ін. Отож, порожня множина $\{\}$ є добре заснованою, як і $\{\{\}\}$ і $\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\{\}\}\}, \ldots\}$. Ця вимога насправді не є ключовою; як і в решті математики, насправді не має значення, які "атоми", з яких структури побудовані, постільки, поскільки вони мають властивості, які ви хочете, щоб вони мали. Фактично, може збивати з пантелику, що не тільки M є множиною, але тепер і елементи M (і елементи елементів M, і ...) також є множинами! Однак добра-заснованість виявляється дуже зручною.

Другою вимогою є вимога на відношення E. Вимагатимемо, щоб $x \in Ey$, я. і т.я. x є членом y. (Пам'ятайте, що x і y, будучи елементами M, є [добре-заснованими] множинами, і тому має сенс говорити, що x є членом y.) Це знову може видатися вимогою, що збиває з пантелику. Наївно можна припустити, щоб побудувати таємничі моделі ZFC, в яких виконується ¬CH, ми могли би бути повинні припустити, що E – деякий вид таємничого відношення, яке не має якої б то не було подібності до звичайного відношення членства, ми могли би поцікавитися, чи існує будь-яка інша модель ZFC, відмінна від самої V (іґноруючи тимчасово той факт, що V не є множиною). На диво, виявляється, що залишається ще маса місця після цієї вимоги.

Третя вимога та, щоб M була транзитивною, тобто щоб кожний член M фактично був підмножиною M. Якщо ви раніше працювали із порядковими числами, то не дуже здивуєтеся, що транзитивність виявляється дуже корисною умовою. Інакше вона могла би видатися невмотивованою; проте певна мотивація стане очевидною пізніше.

Остання вимога, можливо, найважливіша (з точки зору форсинґу), і вона в тому, щоб M була *зліченною* множиною. Якщо ви вивчали хоч трохи логіку, то можете пам'ятати теорему Льовенґейма-Скулема, яка говорить, що якщо зліченна множина аксіом взагалі має будь-які моделі, то вона має модель, що є зліченною множиною. Інакше, умова зліченності може зробити вас ще більш недовірливим, що будь-яке таке M існує. Оскільки наша головна мета тут – обговорити форсинґ і не хочеться витрачати більше часу на вступ, просто попросимо прийняти на віру, що дуже багатий масив прикладів залишається навіть після того, як накладена умова зліченності.

Використовуємо стандартне скорочення "з.т.м." (зліченна транзитивна модель) для моделей ZFC, які задовольняють чотири вищевказані додаткові вимоги.

2. Як виглядає з.т.м., що задовольняє $\neg CH$

Як насправді виглядає з.т.м.? Виявляється, що кожна з.т.м. M містить всі натуральні числа, якщо прийняти домовленість, що 0 є порожньою множиною, $1 = \{\{\}\}$, $2 = \{\{\}, \{\{\}\}$, і взагалі n є множиною $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Вона містить також омегу, нескінченну множину всіх натуральних чисел. А що з степеневою множиною $2^{\text{омега}}$ (множиною всіх підмножин омеги)? Тут легко заплутатися, тому що з одного боку $2^{\text{омега}}$ є незліченною, і оскільки M транзитивна, якщо б $2^{\text{омега}}$ була членом M, то вона була би також підмножиною M, але оскільки M зліченна, вона не може мати незліченної підмножини. З другого боку, ZFC містить аксіому степеневої множини, яка говорить, що якщо x є в M, то так само і степенева множина x є в M. Отож, що відбувається?

Давайте подивимося уважно, що насправді стверджує аксіома степеневої множини. Вона говорить, що для кожного x-а в M існує y в M із такою властивістю: якщо z є членом M таким, що кожне w в M, що задовольняє wEz, задовольняє також wEx, то zEy. Тепер бачимо, що навіть якщо E інтерпретувати як членство (вимога 2 у попередньому розділі), то з цього не випливає, що y є множиною *всіх* підмножин z. Насамперед, неясно навіть, чи z-и у цій аксіомі фактично є підмножинами x; аксіома не вимагає, щоб *кожне w*, що задовольняє wEz, задовольняло також wEx; вона просто вимагає, щоб *кожне w в M*, що задовольняє wEz, задовольняло також wEx. Тепер виявляється, що, оскільки M транзитивна, z-и фактично *є* підмножинами x-а. "Псується" решта аксіоми: y не містить *кожної підмножини x-а*; він містить тільки *ті підмножини x-а, які є в M*. Отож, цілком можливо, що ця *степенева множина* x-а є зліченною.

Як ми повинні називати y? Називання його *степеневою множиною x-а* потенційно заплутує; віддаватимемо перевагу зберегти цей термін для фактичної множини всіх підмножин x-а. Звичайний жаргон такий: називатимемо y *степеневою множиною x-а в M*.

Як вправу на розуміння цієї концепції розглянемо відому теорему Кантора, що степенева множина омеги є незліченною. Доведення Кантора можна зобразити, використовуючи аксіоми ZFC, щоб пред'явити формальну теорему ZFC. Ось ця теорема: "Степенева множина омеги в M незліченна в M." Щоб побачити ясніше, що тут сказано, розширимо її більш повно, щоб одержати: "Немає бієкції в M між омегою і степеневою множиною омеги в M," де бієкція – це певна множина (фактично, певна множина впорядкованих пар, де "впорядкована пара" $\langle x, y\rangle$ визначена теоретико-множинно як $\{\{x\}, \{x, y\}\}$). Отож, хоча навіть степенева множина омеги в M є зліченною і ми можемо побудувати бієкцію у "справжньому світі" між омегою і степеневою множиною омеги в M, виявляється, що ця бієкція *не є членом M*. Тому немає суперечності між тим, щоб бути незліченним в M і бути зліченним (це відомо як "**парадокс Скулема**").

Як тільки ви схопили те, що приєднування "в M" вирішальне і може різко змінити значення терміну або висловлення, можна починати турбуватися про всі види речей у попередніх абзацах. Наприклад, чи не повинні ми розрізняти між "омегою" і "омегою в M"? Це законна турбота. На щастя, транзитивність M тягне, що багато речей, включно із "є підмножиною ...", "є функцією", "омега", і інші основні концепції, є *абсолютними*, що означає, що вони означають те саме, незалежно від того, чи приєднувати "в M". Повне тлумачення форсинґу необхідно мусить охоплювати уважне обговорення того, які концепції є абсолютними і які не є. Однак це досить нудна справа, тому ми пропустимо це. Замість цього ми просто попереджуватимемо, коли щось не є абсолютним.

Тепер можна подати ескіз того, як можна будувати модель для ZFC + ¬CH. Розпочнемо із будь-якої з.т.м. M. За елементарною теорією кардиналів існує множина k в M, яка є ω_2 в M (ω_2, або $\aleph_2$, якщо ви віддаєте перевагу так, є другим кардиналом, більшим ніж ω). Звичайно, k зліченна, але немає бієкції "в M" між k і ω. Отож, тепер давайте побудуємо функцію f із декартового добутку $k \times \omega$ в 2. Її можна тлумачити як послідовність k функцій із ω в 2. Можна легко влаштувати так, щоб всі ці k функцій були різними. Тепер, якщо f вже є в M, то M задовольняє ¬CH! Причина в тому, що функції із ω в 2 можна ототожнити із підмножинами ω, і тому f показує нам, що степеневою множиною ω в M мусить бути принаймні ω_2 в M. Якщо f відсутнє в M, то просто вставимо її в M, щоб дістати більшу множину M', яка задовольняє ¬CH. Що й треба було довести, правильно?

Якщо вам це звучить дуже легковажно, ви маєте рацію. Є багато проблем із цією наївною ідеєю. Насамперед, просте додавання з небес довільної множини до M необхідно зводиться до результату в чомусь іншому, ніж те, що задовольняє ZFC. Не можна просто взяти будь-яку групу і приєднати довільний додатковий елемент і сподіватися, що результатом буде знову група, тому чому ми повинні очікувати, що це спрацює з моделями ZFC? Де, наприклад, буде степенева множина f в M'? Ми не зробили нічого, щоб ґарантувати, що вона існує.

Все таки ця основна ідея додавання f (разом із деякими іншими асоційованими множинами, які нам потрібні, щоб щасливо утримати ZFC), до M, щоб дістати більшу з.т.м. M', що містить деякі множини, які були "відсутні" в M, виявляється, працює, якщо ми достатньо уважні і вмілі у подробицях. Точніше, маємо наступне.

Фундаментальна Теорема. Якщо M є з.т.м., P є елементом M (який задовольняє певні технічні умови), а G є підмножиною P (яка задовольняє певні технічні умови), то множина $M[G]$, одержана приєднанням G (плюс деякі інші допоміжні множини) до M, також є з.т.м.

Пропуски в дужках будуть скоро заповнені і пояснені, але спершу зауважимо, що Фундаментальна Теорема дуже потужна, тому що технічні умови на G і P достатньо помірні, залишаючи величезну сферу для творчості. Розумно вибираючи G і P, можна побудувати $M[G]$, які задовольняють всі види теоретико-множинних тверджень. Навіть сьогодні, майже всі з сотень відомих результатів про незалежність у логіці у кінцевому підсумку ґрунтуються тим чи іншим способом на цій одній фундаментальній побудові.

Читач може бути стурбований, що слово "форсинґ" не з'являється у формулюванні Фундаментальної Теореми. Форсинґ, як ми побачимо пізніше, входить тоді, коли намагаються довести, що $M[G]$ задовольняє різні твердження (або, на звичайному жарґоні, що різні твердження "істинні в $M[G]$"). Форсинґ потрібний, щоб довести Фундаментальну Теорему, оскільки ми повинні довести, що кожна аксіома ZFC істинна в $M[G]$. Форсинґ потрібний також, щоб довести, що $\neg$CH істинне в $M[G]$ (для підходячого G).

3. Імена

Розпочнемо із опису допоміжних множин, що разом із G складають $M[G]$. Вирішальною ідеєю, яка пронизує теорію форсинґу, є те, що деякі факти про G (або загальніше, $M[G]$) залежать від конкретного G, про яке йдеться, в той час як інші є "загальними" фактами, які істинні для всіх G.

У випадку полів немає нагальної необхідності запроваджувати різні поняття для "загального" X і "конкретного" X, тому що ситуація достатньо проста, не виникає ніяких непорозумінь, якщо використовувати "X" для всього. Справи значно складніші в ZFC і важливо мати різні позначення для "загального" і "конкретного" випадків. За аналогією із способом, яким природна мова віддзеркалює певні загальні риси дійсного світу, ми визначимо "імена" для елементів $M[G]$. Імена будуть визначені без посилання на G; проте *значення* імен – множини, імена яких є іменами *чогось* – будуть залежати від G. Точне означення імені (або, точніше, "P-імені", оскільки воно залежить від P) таке:

> Множина x є P-іменем, якщо (і тільки якщо) всі її члени є впорядкованими парами $\langle y, p\rangle$, де y є P-іменем і p знаходиться в P.

Якщо x є P-іменем, то ми також визначаємо область визначення $\mathrm{dom}\,(x)$ так:

$$\mathrm{dom}\,(x) = \{y : \langle y, p\rangle \text{ знаходиться в } x \text{ для деякого } p \text{ в } P\}.$$

Означення P-імені достатньо заплутане, тому розглянемо його уважно. Першою тонкістю є те, що воно виявляється циркулярним. Проте ця очевидна циркулярність насправді є просто стенограмою для рукурсивного означення. Наприклад, порожня множина є P-іменем, тому що всі члени порожньої множини безумовно задовольняють потрібну властивість. Тоді, як тільки ми знаємо, що порожня множина є P-іменем, можна будувати інші множини, які є P-іменами, використовуючи означення.

Припускається, що P-ім'я x називає деяку множину X, яка пов'язана із G, але x призначений для обговорення фактів, які істинні взагалі для всіх G, тому члени x (або, точніше, $\operatorname{dom}(x)$) не є, як ми могли би спершу очікувати, іменами всіх елементів X – що є "дуже специфічними". Радше, члени x є іменами всього, що *потенційно* в X. Тепер, коли ми знаємо точно, у якому конкретному G ми зацікавлені, то ми повинні бути в змозі зрозуміти *точно*, які множини x називає. Із цією метою кожний член x є помічений елементом P. Якщо знаємо G, то можна проходити всі члени x, і як тільки мітка фактично знаходиться в G, то перетворюємо потенційне членство у фактичне членство, натомість коли мітка не знаходиться в G, то відкидаємо потенційного члена. Формально, "значення P-імені x відносно G", що записується $\operatorname{val}(x, G)$, визначається так:

$$\operatorname{val}(x, G) = \{\operatorname{val}(y, G) :\ \langle y, p\rangle \text{ знаходиться в } x \text{ для деякого } p \text{ в } G\}.$$

Це знову рекурсивне означення. Значенням порожньої множини завжди є порожня множина, і можна вибудовувати інші значення із цього значення.

Одна річ, яка все ще може здаватися незрозумілою у цьому означенні – це роль P. Чи не можна просто замінити всюди "P" на "M"? Чому нам потрібне P? Це правильно, що ми могли би визначати імена і їхні значення без посилання на P, але є дві причини для його включення: (1) щоб довести головні теореми форсинґу, нам буде потрібно накласти певну структуру на P, яку ми не можемо взагалі накласти на саму M, і (2) після того, як ми закінчимо побудову механізму і захочемо застосувати його, наявність додаткового ступеня свободи у виборі хорошого P буде дуже цінною у побудові з.т.м.-ей із спеціальними властивостями.

Конструкція імен досить потужна. Наприклад, давайте відтепер і до кінця тексту вимагати, щоб P завжди містило певний елемент, який називається "1". (Ми раніше використовували "1" для множини $\{\{\}\}$, але не повинно бути плутанини, тому що надалі у нас не буде нагоди згадувати $\{\{\}\}$.) Тоді є ім'я – фактично, "канонічне" ім'я – для кожного елемента X множини M. Це можна довести за рекурсією: якщо кожний елемент Y множини X має ім'я Y^*, то можемо утворити ім'я $X^* = \{\langle Y^*, 1\rangle$: всі Y в $X\}$. Тоді оскільки 1 завжди знаходиться в G, то випливає, що $\operatorname{val}(X^*, G) = X$. (Крім того, виявляється, що ця побудова абсолютна, тому X^* знаходиться в M.) Із цього можемо виснувати, що G такоє має ім'я, "діагональне" ім'я $G^* = \{\langle X^*, X\rangle$: всі X в $P\}$. Проганяючи означення, бачимо, що значенням цього імені є множина значень X^*, коли X пробігає всі елементи G, тобто $\operatorname{val}(G^*, G) = G$.

Тепер можемо заповнити перший пропуск у Фундаментальній Теоремі. Якщо задані M, P і G, то формальне означення $M[G]$ таке:

$$M[G] = \{\operatorname{val}(x, G)\colon x \text{ є } P\text{-іменем в } M\}.$$

Хочеться ствердити, що $M[G]$ є з.т.м-ю, якщо M є такою. Однак виявляється, що це неправильно без подальших умов на P і G. Чому це так, є немою наступного розділу.

4. Наївна спроба довести, що ZFC істинна в $M[G]$

Подані досі ідеї хоча і недостатні, щоб довести, що $M[G]$ задовольняє ZFC, все ж купують нам деякі з аксіом ZFC. Зокрема, $M[G]$ задовольняє аксіоми пари і об'єднання ZFC. Ми не визначали тут цих аксіом, але їх легко сформулювати.

Наприклад, парування говорить, що для кожного X і Y в $M[G]$ існує Z в $M[G]$ таке, що XEZ і YEZ. Щоб зрозуміти це, припустимо, що X і Y знаходяться в $M[G]$. За означенням $M[G]$ $X = \mathrm{val}(x, G)$ і $Y = \mathrm{val}(y, G)$ для деяких P-імен x і y в M. Тепер покладемо $z = \{\langle x, 1\rangle, \langle y, 1\rangle\}$. Це є P-іменем, і це також знаходиться в M (останній факт вимагає доведення, але по суті це тому, що M задовольняє парування). Тому $Z = \mathrm{val}(z, G) = \{X, Y\}$ знаходиться в $M[G]$ і має потрібну властивість (згадайте, що "E" означає членство). Парування таке легке, що нам навіть не була потрібна більшість сили концепції імен, щоб довести, що воно істинне в $M[G]$.

Однак виникає проблема із іншими аксіомами ZFC, такими як аксіома степеневої множини. Припустимо, що X знаходиться в $M[G]$ і нехай x – P-ім'я в M таке, що $\mathrm{val}(x, G) = X$. Нам потрібно знайти P-ім'я в M таке, що $Y = \mathrm{val}(y, G)$ містить кожну підмножину X, що лежить в $M[G]$. Природною спробою є наступне означення:

$$y = \{\langle z, 1\rangle\colon z \text{ є } P\text{-іменем в } M \text{ і } \mathrm{dom}\,(z) \text{ є підмножиною } \mathrm{dom}\,(x)\}.$$

Тепер припустимо, що Z є підмножиною X в $M[G]$. Мусить існувати P-ім'я z в M таке, що $Z = \mathrm{val}(z, G)$. Нам би хотілося могти сказати, що $\mathrm{dom}\,(z)$ мусить бути підмножиною $\mathrm{dom}\,(x)$, тому що тоді $\mathrm{val}(z, G)$ знаходилось би в Y і було би по всьому. Але, на жаль, це не обов'язково правильно. Проблема в тому, що z може містити маса "потенційних" елементів, які не знаходяться в $\mathrm{dom}\,(x)$, але вони "пропадають", коли брати значення, тому що вони помічені елементами P, які не знаходяться в G. Отож, здається, ми загрузли.

Однак не все втрачено. Різні P-імена в M можуть фактично мати одне і те саме значення; хоча довільне z, яке називає Z, може не мати області визначення, що міститься в $\mathrm{dom}\,(x)$, можливо, уважний вибір z матиме.

Але як ми знайдемо таке z? Відповідь на це запитання приводить нас (нарешті!) до концепції форсинґу, до якої тепер і переходимо.

5. Форсинґ

Щоб просунутися далі, нам потрібно дослідити ту ідею, що деякі факти про G специфічні для G, натомість інші факти "істинні взагалі". Наприклад, чи порожня множина є членом G, чи не є, є чимось, що дуже специфічне для G. На відміну від цього, розглянемо наступне твердження: Якщо порожня множина є членом G, то G є непорожньою. Це можна сказати про G *без* знання будь-чого специфічного про G. Трошки менш тривіальний приклад: можемо також сказати, що якщо ω є членом G, то об'єднання всіх членів G є нескінченною множиною. Загальніше, без будь-якого знання фактів, що є конкретними для G, можливо будувати достатньо складні твердження вигляду "*Якщо* G містить певний елемент p, *то* мусить бути істинним те і те". Тепер визначимо форсинґ:

> Нехай p – елемент P і нехай ϕ – будь-яке висловлення, іменники якого є P-іменами. Тоді кажемо, що "$p \models \phi$" (читається так: "p вимушує ϕ"), якщо для будь-якої підмножини G множини P (що задовольняє певні технічні умови), те, що p є членом G, тягне, що ϕ істинне в $M[G]$ (тобто ϕ істинне, коли імена замінені їхніми значеннями).

Це означення вимагає деякого пояснення. По-перше, фактично це не є означення форсинґу, поки не вставлені технічні умови (повернемося до цього пізніше;

поки що проігноруємо це). Головна частина означення найкраще прояснюється на прикладі. Пишемо 0 для порожньої множини і нехай G^* – канонічне ім'я G. Нехай ϕ – висловлення "G^* є непорожнім". Тоді "$0 \models \phi$" стверджує, що для будь-якого G те, що 0 є членом G, тягне наступне твердження: "G є непорожнім" (тут у ϕ ім'я G^* замінене його значенням G). Це правильно. З іншого боку, якщо ω^* є канонічним іменем ω, то ми би не сподівалися, що "$0 \models \omega^*$ знаходиться в G^*" є істинним; тобто ми не сподіваємося на той факт, що те, що 0 знаходиться в G, тягне, що ω знаходиться в G, тому що деякі G могли би містити 0, але не ω.

Як ця концепція допомагає нам? Повернемося до проблеми у попередньому розділі доведення того, що $M[G]$ задовольняє аксіому степеневої множини. Із тими самими позначеннями, які були вжиті там, припустимо, що ми тепер визначаємо z' так:

$$z' = \{\langle q, r\rangle\colon q \text{ знаходиться в } \mathrm{dom}\,(x) \text{ і } r \models \text{"}q \text{ знаходиться в } z\text{"}\}.$$

За означенням $\mathrm{dom}\,(z')$ є підмножиною $\mathrm{dom}\,(x)$. Що таке $\mathrm{val}(z', G)$? Ну добре, це визначається тим, які "мітки" знаходяться в G. Але зазначимо, що за означенням форсинґу, якщо r знаходиться в G, то $\mathrm{val}(q, G)$ знаходиться в $\mathrm{val}(z, G) = Z$. Тому $\mathrm{val}(z', G)$ є підмножиною Z.

Це прогрес, але те, що ми насправді хочемо – це щоб $\mathrm{val}(z', G)$ фактично було рівним Z, а це взагалі не ясно. Що нам потрібно, щоб довести, що $\mathrm{val}(z', G) = Z$, це те, що для кожного Q в Z є P-ім'я q для Q в $\mathrm{dom}\,(x)$ і P-ім'я r в G такі, що $r \models$ "q знаходиться в z". Знаходження підходячого q виявляється не дуже важким, але існування r не таке ясне; те, що нам потрібно – це теорема, що для кожного твердження ϕ (такого як "Q знаходиться в Z"), яке фактично істинне в $M[G]$ для конкретного G, є деякий елемент r того конкретного G такий, що простого знання того, що r знаходиться в G, достатньо, щоб виснувати, що ϕ істинне про G. Це не здається правдоподібним. Взагалі, знання тільки одного елемента G не говорить нам дуже багато про G.

Однак можна налагодити цю проблему, якщо обмежити, щоб G і P мали певну структуру, так щоб деякі елементи r із G були "більш інформативними", ніж інші, тобто знання, що r знаходиться в G, говорить нам більше про G, ніж знання, що деякий інший елемент p знаходиться в G. Найпростіший спосіб досягти цього – накласти часткове впорядкування $<$ на P (із "1" як єдиним максимальним елементом) і вимагати від G бути *фільтром*, тобто щоб G мало дві наступні властивості:

1. Якщо r знаходиться в G і $r \le p$, то p також знаходиться в G;
2. Для кожного p і q в G існує r в G таке, що $r \le p$ і $r \le q$.

Перша з цих умов ґарантує, що знання, що деякий елемент r знаходиться в G, говорить нам не тільки те, що r знаходиться в G, але й що кожний елемент $\ge r$ також знаходиться в G. Отож, r є "більш інформативним", ніж p, якщо $r \le p$. Про другу умову можна думати як схоплення ідеї, що для будь-яких двох елементів p і q є деякий елемент r, який є принаймні так само інформативний, як p і q разом. Якщо ми збираємося наполягати на тому, щоб дивитися тільки на окремі елементи G, щоб дістати інформацію про G, то зрозуміло, що вона є корисною умовою для накладання.

Якщо тепер виправити наше означення $\models$, вставляючи технічні умови, що P повинна бути частково впорядкованою множиною і G повинна бути фільтром, то це дає нам більше надії бути здатними знайти r в G таке, що $r \models$ "Q знаходиться в Z". На жаль, навіть умова бути фільтром виявляється недостатньо хорошою. Інтуїтивно причина в тому, що оскільки P може бути нескінченною, немає ґарантії, що для довільного твердження ϕ, яке щось стверджує про G, існуватиме r в G, яке дасть нам достатньо інформації, щоб вирішити ϕ. Ми могли би спробувати знаходити все менші і менші r-ки у частковому впорядкуванні, що даватиме нам все більше і більше інформації, але ми ніколи не зможемо знайти одного, що сказало би нам те, що нам потрібно знати.

Наступна умова на G вирішить цю проблему. Визначимо підмножину D множини P як "щільну", якщо для кожного p в P існує q в D таке, що $q \leq p$. Фільтр G є "загальним", якщо він перетинає кожну щільну підмножину.

Тепер можна довести, що якщо ми вимагаємо, щоб P була частково упорядкованою множиною із єдиним максимальним елементом 1 і визначаємо "$p \models \phi$" як таке, що означає, що для всіх загальних фільтрів G в P ϕ істинне в $M[G]$, то правильне таке:

1-й факт про форсинґ. Зафіксуємо конкретний загальний фільтр G на P. Тоді для будь-якого ϕ, яке істинне в $M[G]$, існує r в G таке, що $r \models \phi$.

Якщо тепер повернутися назад до спроби довести аксіому степеневої множини, то бачимо, що 1-й факт про форсинґ – це просто те, що нам потрібно, щоб довести, що $\mathrm{val}(z', G) = Z$. Єдина річ, яку ще треба довести – це те, що z' фактично знаходиться в M. Для цього нам потрібно таке:

2-й факт про форсинґ. $\models$ визначуване в M.

Не скажемо точно, що означає 2-й факт про форсинґ, але інтуїтивно він стверджує, що навіть, якщо ми додамо побічні умови (частковий порядок, загальний фільтр), то означення $\models$ є все ще достатньо загальним так, що воно не вимагає будь-якого специфічного знання G; тому множини, подібні до z', які визначені, використовуючи $\models$, все ще лежать всередині M.

Доведення 1-го і 2-го фактів про форсинґ нелегке, навіть після того, як всі вищезазначені означення (з якими самими нелегко розібратися!) були надані. Тут відсилаємо до подробиць у книзі Коена [Ko] або Кунена [Ku]. Потрібна робота, що довести їх, однак віддячить великими дивідендами. Можна буде довести, що не тільки аксіома степеневої множини, а й всі інші аксіоми ZFC істинні в $M[G]$, просто використовуючи два факти про форсинґ (навіть без занурення в доведення самих фактів), і дотримуючись подібного зразка до нашого доведення аксіоми степеневої множини. Отож, Фундаментальна теорема доведена! Для зручності переформулюємо її із всіма заповненими пропусками:

Фундаментальна Теорема. Якщо M є з.т.м.-ю, P – частково впорядкованою множиною в M із єдиним максимальним елементом 1 і G – непоржнім загальним фільтром P, то множина $M[G] = \{\mathrm{val}(x, G)\colon x$ є P-іменем в $M\}$ також є з.т.м.-ю.

6. Знову до $\neg CH$

Тепер подивимося, як застосувати Фундаментальну Теорему до континуум-гіпотези. Перша наша думка могла би бути така – взяти P як множину всіх впорядкованих пар $\langle x, y\rangle$ із x в $k \times \omega$ і y в 2, сподіваючись, що G можна вибрати як функцію із $k \times \omega$ в 2. Однак це недостатньо спрацює, тому що члени функції є впорядкованими парами, і ніяка конкретна впорядкована пара не є "більш інформативною" про функцію, ніж будь-яка інша впорядкована пара.

З другого боку, *великі* підмножини впорядкованих пар несуть більше інформації, ніж менші підмножини, тому це натяк, що нам слід "перейти до степеневої множини". Точніше, нехай P – множина всіх скінченних часткових функцій із $k \times \omega$ в 2, тобто функцій із із скінченної підмножини $k \times \omega$ в 2. Частково впорядкуємо ці функції за оберненим включенням, тобто $f \leq g$, якщо множина всіх впорядкованих пар в g міститься у множині всіх впорядкованих пар f. Тепер нескладно зрозуміти, що для кожного y в $k \times \omega$ множина D_y всіх елементів P, які визначені на y (тобто, що містять y як частину їхньої області визначення), є щільною. Тому якщо G є загальним фільтром в P, G мусить перетнути кожну таку D_y, і об'єднання всіх елементів G буде *сукупною* функцією із $k \times \omega$ в 2. Фундаментальна Теорема говорить нам, що можна успішно "вставити" цю функцію, якої бракувало, в M, якщо її вже там не було. Крім того, той факт, що G є загальним, дає нам автоматично, як бонус, той факт, що кожна із k функцій із ω в 2 є відмінною! (Подивіться, чи ви зможете довести це, будуючи підходячу щільну підмножину в P. Відповідь можна подивитися у [Ku].) Немає потреби вміло вибирати "правильний" загальний фільтр; у цьому випадку спрацює будь-який загальний фільтр.

Чи ми закінчили? Ну, майже ... є ще два пункти, про які треба потурбуватися. Насамперед, ми ще не встановили, що загальні фільтри існують. Це виявляється нескладним для доведення, але це справді залежить від зліченності M (ось де зліченність M виявляється важливою). По суті, із-за зліченності можна занумерувати всі щільні підмножини і вибрати одну з кожної; фільтр, породжений всіма цими елементами, і буде загальним.

Другий пункт більш суттєвий. Зрозуміло, чому Коен зміг розробити форсинґ, довести Фундаментальну Теорему, і все таки не досягти успіху у доведенні чого-небудь-нового про континуум-гіпотезу! Причина в тому, що ніщо в загальних рамках форсинґу не ґарантує, що в $M[G]$ кардинал k все ще буде рівним ω_2. Бути кардиналом – не є абсолютною властивістю, тому великі кардинали можуть "колапсувати" (обрушуватись) у нижчі кардинали, коли переходимо до $M[G]$. Причина в тому, що допоміжні множини в $M[G]$ можуть включати біекцію між k і меншим кардиналом. Проте, на щастя для Коена, можна довести, що кардинальний колапс не виникає для конкретного P, описаного вище. Деталі див. у [Ku].

Одною з причин, з яких можна бути незадоволеним цим викладенням, є те, що означення "$p \models \phi$" і "G є загальним фільтром" все ще здаються витягнутими з капелюха, хоча одержується навіть певна апостеріорна інтуїція про те, чому кожна з частин означення є важливою. Насправді існують альтернативні підходи до форсинґу, наприклад, використовуючи "булево-значні моделі" (див. [KK] або стисло [Ch1]). Це дещо більш інтуїтивно, тому що та ідея, що деякі властивості вимагають більше "конкретної інформації про G", щоб бути вирішеними, "прямо" закодовується, тобто ми беремо множину всіх тверджень і накладаємо на цю множину частковий порядок. Концепція загального фільтра стає простішою (по суті, фільтр стає "ультрафільтром" у повній булевій алгебрі). Однак у цьому підході потрібно задіювати ідею вкладення часткових порядків у повну булеву алгебру; немає упевненості, як це мотивувати?

§8. Сюрреальні числа

Побудову сюрреальних чисел здійснив Д.Конвей у 1974 р. У художній формі нова математична ідея була представлена у книзі Конвея (що придумав ідею) і Д.Кнута (який запропонував цей термін) у тому ж році. У 1976р. Конвей опублікував книгу [C], де використав ці числа для аналізу ігор. Основна ідея сюрреальних чисел подібна до дедекіндових перерізів. Будуємо нові числа, представляючи їх двома множинами чисел, L і R, що наближають нове число; множина L містить множину чисел під новим числом, а множина R – над. Таке наближення записуватимемо $\{L|R\}$. На L і R не накладається ніяких обмежень, крім того, що кожний елемент L повинен бути менший, ніж будь-яке число в R. Наприклад, $\{\{1,2\}|\{5,8\}\}$ – правильна побудова певного числа між 2 і 5. (Якого саме і чому, буде пояснено пізніше.) Множинам дозволяється бути порожніми. Неформальною інтерпретацією пари $\{L|\{\}\}$ буде "число, вище ніж будь-яке число в L", а $\{\{\}|R\}$ – "число, нижче ніж будь-який елемент в R". Це приводить до правила:

Правило побудови. Якщо L і R – дві множини сюрреальних чисел і ні один член R не є менший ніж або рівний до будь-якого члена L, то $\{L|R\}$ є сюрреальним числом.

Для сюрреального числа $x = \{X_L|X_R\}$ множини X_L і X_R називаються лівою множиною x і правою множиною x відповідно. Щоб уникати надміру дужок, писатимемо $\{\{a,b,...\}|\{x,y,...\}\}$ просто як $\{a,b,...|x,y,...\}$ і $\{\{a\}|\{\}\}$ – як $\{a|\}$, а $\{\{\}|\{a\}\}$ – як $\{|a\}$.

Правило побудови залежить від відношення "менше ніж або рівне" (записується $\leq$) між сюрреальними числами. Воно задається правилом:

Правило порівняння. Для сюрреальних чисел $x = \{X_L|X_R\}$ і $y = \{Y_L|Y_R\}$ виконується $x \leq y$, якщо і тільки якщо y не є менший або рівний до жодного члена X_L і ні один член Y_R не є менший або рівний x.

Правило порівняння є рекурсивне, тому нам потрібна деяка форма математичної індукції, щоб воно було правильно визначене. Очевидним кандидатом є скінченна індукція, що дозволить породити всі числа, які можна побудувати, застосовуючи правило побудови скінченне число разів. Більша гнучкість досягається з використанням трансфінітної індукції, як побачимо нижче.

Якщо ми хочемо, щоб породжені числа представляли числа, то впорядкування, що визначене на них, повинно бути лінійним порядком (тобто рефлексивним, транзитивним і антисиметричним). Однак відношення $\leq$ визначає тільки передпорядок (рефлексивне і транзитивне), тобто воно не є антисиметричним. Щоб виправити цей недолік, визначаємо бінарне відношення $==$ над породженими сюрреальними числами так, що

$$x == y \text{ я.т.я. } \ x \leq y \quad \text{і} \quad y \leq x.$$

Оскільки це визначає відношення еквівалентності (тобто рефлексивне, симетричне і транзитивне), то впорядкування на цих класах еквівалентності буде лінійним порядком. Тлумачення цього таке, що якщо x і y в тому самому класі еквівалентності, то вони фактично представляють те саме число. Клас еквівалентності, до якого належить x, позначається $[x]$.

Тепер розглянемо деякі приклади і подивимося, як числа поводяться при впорядкуванні. Найпростіший приклад, звісно, такий:

$$\{|\}, \quad \text{тобто} \ \ \{\{\}|\{\}\},$$

який будується взагалі без індукції. Назвемо це число 0, а клас еквівалентності [0] записуватимемо просто 0. Застосовуючи првило побудови, можемо розглянути наступні три числа:

$$\{0|\}, \quad \{|0\}, \quad i \ \{0|0\}.$$

Останнє число не є правильним, тому що $0 \leq 0$. Розглянувши впорядкування правильних сюрреальних чисел, бачимо, що

$$\{|0\} < 0 < \{0|\},$$

де $x < y$ позначає, що $x \leq y$, але не $y \leq x$. Ми будемо посилатися на $\{|0\}$ і $\{0|\}$ як на -1 і 1 відповідно, а відповідні класи еквівалентності позначатимемо так само. Поки що кожний клас еквівалентності містить лише по одному елементу і можна записати

$$[\{|0\}] < [0] < [\{0|\}],$$

або навіть

$$-1 < 0 < 1.$$

Якщо застосувати правило побудови ще раз, одержимо наступну впорядковану множину:

$$\begin{aligned}
&\{|-1\} == \{|-1,0\} == \{|-1,1\} == \{|-1,0,1\}\\
&< \{|0,1\} == [-1]\\
&< \{-1|0\} == \{-1|0,1\}\\
&< \{-1|\} == \{|1\} == \{-1|1\} == [0]\\
&< \{0|1\} == \{-1,0|1\}\\
&< \{-1,0|\} == [1]\\
&< \{1|\} == \{0,1|\} == \{-1,1|\} == \{-1,0,1|\}.
\end{aligned}$$

Можемо зауважити, що:

1. Ми знайшли чотири нові класи еквівалентності: $[\{|-1\}]$, $[\{-1|0\}]$, $[\{0|1\}]$ і $[\{1|\}]$.

2. Всі класи еквівалентності тепер містять більше ніж один елемент.

3. Клас еквівалентності числа залежить тільки від максимального елемента його лівої множини і мінімального елемента правої множини.

Перше спостереження піднімає питання інтерпретації цих нових класів еквівалентності. Оскільки неформальною інтерпретацією $\{|-1\}$ є число просто перед -1, то назвемо його -2 і позначимо клас еквівалентності так само. З подібної причини назвемо $\{1|\}$ числом 2. Число $\{-1|0\}$ – це число між -1 і 0 і назвемо його $-\frac{1}{2}$. Нарешті, назвемо $\{0|1\}$ числом $\frac{1}{2}$. Виправдання для таких назв буде дано відразу після того як ми визначимо додавання і множення.

Друге спостереження піднімає питання, чи можна замінити сюрреальні числа їхніми класами еквівалентності. На щастя, відповідь "так", тому що можна показати, що

$$\text{якщо}\ \ [X_L] = [Y_L]\ \text{і}\ \ [X_R] = [Y_R],\ \text{то}\ \ [\{X_L|X_R\}] = [\{Y_L|Y_R\}],$$

де $[X]$ позначає $\{[x]|x \text{ в } \ X\}$. Тому опис впорядкованої множини вище можна переписати так:

$$-2 < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} < 1 < 2.$$

Третє спостереження поширюється на всі сюрреальні числа із скінченними лівими і правими множинами. Для нескінченних лівої або правої множини воно правильне у зміненій формі, бо нескінченні множини можуть не містити максимального або мінімального елемента. Тому число $\{\{1,2\}|\{5,8\}\}$ еквівалентне до $\{2,5\}$, яке буде обчислено точно нижче.

Обчислення із сюрреальними числами. Додавання і множення сюрреальних чисел визначаються наступними трьома правилами:

Додавання

$x + y = \{X_L|X_R\} + \{Y_L|Y_R\} = \{X_L + y \cup x + Y_L|X_R + y \cup x + Y_R\}$,
де $X + y = \{x + y|x \text{ в } \ X\}$ і $x + Y = \{x + y|y \text{ в } \ Y\}$.

Протилежний елемент

$-x = -\{X_L|X_R\} = \{-X_R| - X_L\}$,
де $-X = \{-x|x \text{ в } \ X\}$.

Множення

$xy = \{X_L|X_R\}\{Y_L|Y_R\} =$
$\{(X_Ly+xY_L-X_LY_L)\cup(X_Ry+xY_R-X_RY_R)|(X_Ly+xY_R-X_LY_R)\cup(X_Ry+xY_L-X_RY_L)\}$,
де $XY = \{xy|x \text{ в } \ X \text{ і } \ y \text{ в } \ Y\}$, $Xy = X\{y\}$ і $xY = \{x\}Y$.

Можна показати, що ці операції правильно визначені для сюрреальних чисел, тобто результатом знову буде правильно визначене сюрреальне число, тобто ліва множина результату буде "меншою", ніж права. Тепер можна перевірити, що вибрані імена чисел, які ми знайшли дотепер, є відповідні. Наприклад, виконується $0+0 = 0$, $1+1 = 2$, $-(1) = -1$ і $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} == 1$. Ці операції узагальнюються і на класи еквівалентності сюрреальних чисел. Це робиться без проблем, тому що

$$\text{якщо}\ \ [x] = [x']\ \text{і}\ \ [y] = [y'],\ \text{то}\ \ [x + y] = [x' + y']\ \text{і}\ \ [-x] = [-x']\ \text{і}\ \ [xy] = [x'y'].$$

Нарешті, можна показати, що узагальнені операції на класах еквівалентності мають бажані алгебраїчні властивості, тобто класи еквівалентності плюс їхнє впорядкування і алгебраїчні операції утворюють впорядковане поле із застереженням, що вони не утворюють *множину*, а *властивий клас* (див. нижче). Фактично, це дуже особливе впорядковане поле: воно найбільше. Кожне інше впорядковане поле можна вкласти в сукупність сюрреальних чисел. Надалі не розрізняємо сюрреальні числа і їхні класи еквівалентності і сам клас еквівалентності називаємо сюрреальним числом.

Породження сюрреальних чисел, використовуючи скінченну індукцію. Подивимося, які числа можна утворити, застосовуючи правило побудови. Спочатку розглянемо числа, які можна утворити за скінченне число разів. Робимо це індуктивно, визначаючи S_n із натуральним n так:

- $S_0 = \{0\}$;

- S_{i+1} є S_i плюс множина всіх сюрреальних чисел, які породжуються за правилом побудови із підмножин S_i.

Множину всіх сюрреальних чисел, які породжуються на деякому S_i, позначаємо S_ω. Перші множини класів еквівалентності, які ми знайдемо, є такі:

$$\begin{aligned}
&S_0 = \{0\}\\
&S_1 = \{-1 < 0 < 1\}\\
&S_2 = \{-2 < -1 < -\tfrac{1}{2} < 0 < \tfrac{1}{2} < 1 < 2\}\\
&S_3 = \{-3 < -2 < -\tfrac{3}{2} < -1 < -\tfrac{3}{4} < -\tfrac{1}{2} < -\tfrac{1}{4} < 0 < \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{2} < \tfrac{3}{4} < 1 < \tfrac{3}{2} < 2 < 3\}\\
&S_4 = \dots
\end{aligned}$$

Це приводить до наступних спостережень:

1. На кожному кроці максимум (мінімум) збільшується (зменшується) на 1.

2. На кожному кроці знаходимо числа, які є посередині двох послідовних чисел з попереднього кроку.

Внаслідок цього всі породжені числа є *двійковими дробами*, тобто записуються як нескоротний дріб

$$\frac{a}{2^b},$$

де a і b – цілі і $b \geq 0$. Це означає, що такі дроби, як $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$, не будуть породжені. Зазначимо, що можна породити числа, які як завгодно близько до них.

До нескінченності і поза неї. Наступний крок полягає у взятті S_ω і продовженні застосування правила побудови до неї, породжуючи таким чином $S_{\omega+1}$, $S_{\omega+2}$ і т.д. Зазначимо, що ліві і праві множини тепер можуть бути нескінченними. Фактично, можна визначити множину S_a для будь-якого порядкового числа (ординала) a за трансфінітною індукцією. Найменше значення a, для якого з'являється задане сюрреальне число, називається його *днем народження*. Кожне сюрреальне число має порядкове число днем народження. Наприклад, днем народження 0 є 0, а $\frac{1}{2}$ — 2. Число $\{L|R\}$ еквівалентне до найпростішого числа між L і R, тобто числа між між L і R із найменшим ординалом як днем народження. Тому $\{\{1,2\}|\{5,8\}\}$ еквівалентне до 3, тому що день народження 3 менший, ніж день народження будь-якого іншого числа між 2 і 5.

Вже в $S_{\omega+1}$ знайдемо дроби, яких не вистачало в S_ω. Наприклад, дріб $\frac{1}{3}$ можна визначити як

$$\frac{1}{3} = \{\{\frac{a}{2^b} \text{ в } \ S_\omega | 3a < 2^b\}|\{\frac{a}{2^b} \text{ в } \ S_\omega | 3a > 2^b\}\}.$$

Правильність цього означення випливає з того факту, що $3\left(\frac{1}{3}\right) == 1$. Днем народження $\frac{1}{3}$ є $\omega + 1$. В $S_{\omega+1}$ виникають не тільки всі раціональні числа, але й всі скінченні дійсні числа також. Наприклад,

$$\pi = \{3, 25/8, 201/64, \dots | \dots, 101/32, 51/16, 13/4, 7/2, 4\}.$$

Ще один приклад числа, що будується в $S_{\omega+1}$:

$$\varepsilon = \{0|\ldots, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1\}.$$

Зрозуміло, що це число більше від нуля, але менше від всіх додатних дробів, і тому є нескінченно малим числом. Це не єдине нескінченно мале, бо, наприклад,

$$2\varepsilon = \{\varepsilon|\ldots, \varepsilon+\tfrac{1}{16}, \varepsilon+\tfrac{1}{8}, \varepsilon+\tfrac{1}{4}, \varepsilon+\tfrac{1}{2}, \varepsilon+1\} \;\; i$$
$$\tfrac{\varepsilon}{2} = \{0|\varepsilon\}.$$

Поряд із нескінченно малими породжуються і нескінченно великі числа такі як

$$\omega = \{S_\omega|\}.$$

Його значення більше, ніж будь-яке число в S_ω, і його клас еквівалентності тому називається ω. Це число еквівалентне до порядкового числа із тим самим іменем. Також маємо рівність $\omega = [\{1, 2, 3, 4, \ldots|\}]$. Фактично, всі порядкові числа можна виразити як сюрреальні числа. Оскільки додавання і віднімання визначені для всіх сюрреальних чисел, можемо використовувати ω подібно до будь-якого іншого числа і показати, наприклад, що

$$\omega+1 = \{\omega|\} \quad i$$
$$\omega-1 = \{S_\omega|\omega\}.$$

Можемо робити так і для більших чисел:

$$\omega+2 = \{\omega+1|\} \qquad \omega+3 = \{\omega+2|\}$$
$$\omega-2 = \{S_\omega|\omega-1\} \qquad \omega-3 = \{S_\omega|\omega-2\}$$
$$\omega+\omega = \{\omega+S_\omega|\}.$$

Точно так само як 2ω є більше, ніж ω, можна показати, що $\frac{\omega}{2}$ є менше, тому що $\frac{\omega}{2} = \{S_\omega|\omega-S_\omega\}$. Нарешті, можна показати, що є тісний зв'язок між ω та ε, тому що $\frac{1}{\varepsilon} = \omega$. Звичайне додавання і множення ординалів відрізняється від додавання їх сюрреальних зображень. Сума $1+\omega$ рівна ω для ординалів, проте для сюрреальних чисел $\omega+1 = 1+\omega > \omega$.

Оскільки кожне сюрреальне число будується із сюрреальних чисел, "старших" від нього самого, можемо доводити багато теорем про сюрреальні числа, використовуючи трансфінітну індукцію: показуємо, що теорема виконується для 0, а потім доводимо, що вона виконується для $x = \{X_L|X_R\}$, якщо виконується для всіх елементів X_L і X_R.

Таким способом породжується так багато чисел, що фактично ніяка множина не може містити їх всіх. Сюрреальні числа подібно до ординалів утворюють *властивий клас*, а не множину.

Степені ω. Щоб класифікувати "порядки" нескінченних сюрреальних чисел, відомі також як архімедові класи, Конвей асоціював із кожним сюрреальним числом x сюрреальне число

$$\omega^x = \{0, r\omega^{X_L}|s\omega^{X_R}\},$$

де r і s пробігають додатні дійсні числа. Якщо $0 \le x < y$, то ω^y є нескінченно більше, ніж ω^x. Степені ω задовольняють такі умови:

- $\omega^x\omega^y = \omega^{x+y}$,
- $\omega^{-x} = \frac{1}{\omega^x}$,

тому вони поводяться так, як і очікувалося.

Кожний степінь ω є найпростішим сюрреальним числом у своєму архімедовому класі; навпаки, кожний архімедів клас всередині сюрреальних чисел містить єдиний найпростіший елемент. Отож, для кожного додатного сюрреального числа x завжди існує деяке додатне дійсне число r і деяке сюрреальне число y такі, що $x - r\omega^y$ є нескінченно меншим, ніж x. Це продовжується за трансфінітною індукцією так, що кожне сюрреальне число x має "нормальну форму", аналогічну до *канторової нормальної форми* для порядкових чисел. Кожне сюрреальне число можна однозначно записати як

$$x = r_0\omega^{y_0} + r_1\omega^{y_1} + \cdots ,$$

де кожне r_α є ненульовим дійсним числом і y_α утворюють строго спадну послідовність сюрреальних чисел. Проте ця "сума" може мати несікнченно багато членів і, загалом, має довжину довільного порядкового числа. Сюрреальні числа, що розглядаються таким способом, нагадують *поле степеневих рядів*, за тим винятком, що спадні послідовності експонент мусять бути обмежені за довжиною ординалом і їм не дозволяється бути такими довгими, як клас ординалів.

Зауваження. Сюрреальні числа утворюють властивий клас, а не множину, тому термін "поле", вжитий вище, не є строго коректний. Це можна обійти, обмеживши побудову до *універсуму Ґротендіка*, що дає множину із потужністю деякого сильно недосяжного кардинала.

Існує альтернативна побудова сюрреальних чисел, у якій рівність є тотожністю, а не індуктивно визначеним відношенням. Однак вона, на відміну від способу Конвея, вимагає попередньої побудови ординалів. Можна додати, що сюрреальні числа належать до конструктивного розуміння математичних об'єктів. Інтуїціонізм і марковський конструктивізм базуються на достатньо подібних поглядах на природу об'єктів математики.

Аксіоматичний підхід. Подібно до аксіоматичного підходу до дійсних чисел, наступні аксіоми ґарантують єдиність з точністю до ізоморфізму.

Трійка $\langle \mathbf{No}, <, b\rangle$ є сюрреальною числовою системою, я.т.я.:

- $<$ – лінійний порядок на **No**;
- b – функція із **No** на клас всіх ординалів (b називається "функцією дня народження" на **No**);
- Нехай A і B – підкласи **No** такі, що для всіх $x \in A$ і $y \in B$ $x < y$. Тоді існує єдине $z \in$**No** таке, що $b(z)$ є мінімальне і для всіх $x \in A$ і всіх $y \in B$ $x < z < y$; (На цю аксіому посилаються, як на теорему про простоту Конвея.)
- Крім цього, якщо ординал α більший, ніж $b(x)$ для всіх $x \in A, B$, то $b(z) \leq \alpha$. (Систему, що задовольняє цю аксіому, Аллінг називає "повною сюрреальною числовою системою".)

§9. Супердійсні і супер-дійсні числа

Супер-дійсні числа – це розширення дійсних чисел, подібне до сюрреальних і гіпердійсних чисел, яке утворює більш містку категорію.

Подамо лише означення згідно з [D]. Нехай X – простір Тихонова, що називається також $T_{3,5}$-простором і $C(X)$ – алгебра неперервних дійснозначних функцій на X. Припустимо, що P – простий ідеал в $C(X)$. Тоді фактор-алгебра $A = C(X)/_P$ є за означенням областю цілісності, що є дійсною алгеброю і є цілком упорядкованою. Фактор-поле F алгебри A є супер-дійсним полем, якщо F строго містить дійсні числа $\mathbb{R}$, так що F не є порядково ізометричне до $\mathbb{R}$, хоча вони можуть бути ізоморфні, як поля.

Якщо простий ідеал P є максимальним ідеалом, то F – поле гіпердійсних чисел. Дана побудова узагальнює першу побудову поля гіпердійсних чисел, здійснену Е. Х'юітом у 1948р. саме як фактор-простору неперервних функцій на цілком регулярному топологічному просторі за максимальним ідеалом.

Існує ще один, менш амбітний, але значно доступніший підхід до визначення нескінченно малих, запропонований Д. Толлом ([T]). Просто постулюється існування нескінченно малого ε. Інші числа породжені замиканням над основними арифметичними операціями. Кожне супердійсне число має вигляд

$$z = a_n\varepsilon^n + a_{n-1}\varepsilon^{n-1} + \ldots + a_1\varepsilon_1 + a_0 + a_{-1}\varepsilon^{-1} + \ldots + a_{-m}\varepsilon^{-m}, \quad a_i \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}.$$

Для супердійсних розвинень функцій розглядаються лише аналітичні функції. Результатом є числення нескінченно малих, подібне до лейбніцевого. Однак при цьому немає нескінченних цілих чисел і побудована множина незручна для побудови аналізу. Зазначимо, що це нагадує ідею Д. Лоґвіца ще з 1958р.

§10. Пролог*

"Моє особливе ставлення до математики ґрунтувалося, властиво, тільки на її чисто спекулятивній частині, інакше кажучи, я ціню в ній тільки те, що одночасно є і філософією". (Б.Больцано, Автобіографія)

Тепер зрозуміло, що дійсну числову пряму і всі її гипердійсні моделі як завгодно великої потужності можна уявляти на одній (сюрреальній) геометричній прямій. При цьому точки будь-якої такої моделі розподілені дискретно на такій прямій.

Цікаво порівняти твердження континуум-гіпотези ($c = \aleph_1$) із дійсної, гіпердійсної і сюрреальної точок зору. У класичній теорії множин це твердження і його заперечення сумісні із ZFC (як довели Ґедель і Коен), у нестандартному аналізі Робінсона "континуум" $^*\mathbb{R}$ може мати ззовні (у ZFC) яку завгодно потужність, а на сюрреальній прямій Конвея навіть не можна поставити такого запитання (чи $c = \aleph_1$), бо тут "континуум" містить всі потужності.

Із перспективи розглянутих вище числових систем цікаво згадати висловлення середньовічного схоласта Альберта Великого, який, дивлячись на малюнок двох концентричних кіл і радіуса, що встановлює взаємно однозначну відповідність між ними, сказав таке: "Нескінченність непізнавана, так само, як і Бог". Зрозуміло, що залежно від вибору "геометрій" на цих колах поширені міркування про рівнопотужність втрачають силу. Ситуація стала складнішою і багатограннішою, ніж це здавалося при звичайному ототожненні геометричних точок із дійсними числами та розумінні аксіоми повноти як відображення неперервності у фізичному сенсі. Нагадаємо, що за Евклідом точка – це те, що не має частин, а число – множина монад. Саме цю відмінність і можна вважати джерелом непорозумінь.

Зазначимо, що перші приклади неархімедових числових систем, що містять актуальні нескінченно малі, з'явилися ще у 70-90-і роки XIX століття. Про пов'язану з цим боротьбу ідей та суперечки вчених (Ганкель, Тома, Дюбуа-Реймон, Штольц, Бетацці, Веронезе, Кантор, Віванті, Пеано) дивіться статтю [Ehr].

Із перспективи розглянутих вище побудов цікаво порівняти формулювання аксіоми неперервності самим Дедекіндом (див. ст.85) і "за Дедекіндом" у популярних підручниках з математичного аналізу. Дедекінд (у передмові до [Дд], 1872р.) писав: "... аксіома цілком узгоджується з тим, що я зазначаю як суть неперервності. Яку ж користь дасть виділення, хоча би лише в понятті, дійсних чисел ще вищого порядку, я, згідно з моїм розумінням системи дійсних чисел, як досконалої в самій собі, ще визнати не в стані." (Тут слова про числа вищого порядку навіяні статтею Кантора.)

Крім згаданої книги Дедекінда, перед вивченням аналізу (математичного і функціонального) бажано познайомитись із дослідженнями Ф. Медведева ([M1-M5]).

Додамо насамкінець, що кваліфіковане обговорення проблеми континууму можна виявити вже у книзі Гобсона ([Ho]) 1907р. Єдиною метою нашого посібника було показати, як протягом XX століття методи теорії множин, алгебри та аналізу прояснили ситуацію.

Про різні напрями узагальнення аналізу. Різні галузі аналізу у математиці мають місце типово над деяким полем або алгеброю, які є одновимірними або багатовимірними множинами, а інколи навіть з дробовою вимірністю. Наприклад, загальновідомий дійсний аналіз від однієї змінної або багатьох змінних, комплексний аналіз, кватерніонний аналіз і т.ін. Розвиток математики у 20-у столітті привів до створення нестандартного аналізу від одної гіпердійсної змінної і багатьох гіпердійсних змінних, що пробігають множини як завгодно великої потужності (див. [Ке],[Д],[А-Л],[G]), та сюрреального аналізу над властивим класом ([А]). Найбільші зміни під впливом цих досліджень відбуваються у негладкому аналізі, у теорії ймовірностей і теорії міри, у якісній теорії диференціальних рівнянь і в математичній економіці. Крім цього, досліджують і аналіз над булевозначними моделями ([КК],[Г-К], де функціональні простори перетворюють у числові множини, оператори – в функціонали, вектор-функції – у звичайні відображення і т.ін. Цей напрям дав нові ідеї і результати в теорії просторів Канторовича, в теорії алгебр фон Неймана, у випуклому аналізі і теорії векторних мір.

У теоретичній комп'ютерній науці вивчають різні види аналізу над скінченними полями такими як, наприклад, $\mathbb{F}_2$, використовуючи гіперстискуваність. Аналіз над p-адичними числами $\mathbb{Z}_p$ або аделями $\mathbb{A}$ використовують у теорії чисел. Все частіше можна також побачити аналіз над такими об'єктами як графи, де взагалі немає алгебри, хоча до певної міри шляхи в графі можна розглядати як криві над $\mathbb{Z}$.

"*Я* знаю, що *я* нічого не знаю" (Сократ)

"По суті, *ми* нічого не знаємо, бо істина – в глибинах" (Демокріт)

"*Він* не знає навіть того, що *він* нічого не знає" (Філолай)

"Коли *хто* думає собі, ніби щось знає, той нічого не знає ще так, як знати повинно" (Перше послання ап. Павла до корінтян, 8,2)

"Істинний математик – це ентузіаст per se. Без ентузіазму немає математики. Чиста математика -— це релігія. На Сході істинна математика у себе на батьківщині. В Європі вона виродилась у суцільну техніку." (Новаліс)

"Математика – це предмет, у якому *ми* ні не знаємо, про що говоримо, ні того, чи істинне те, що говоримо." (Б.Рассел)

Список літератури.

[A] N. Alling. *Foundations of Analysis over Surreal Number Fields.* North-Holland, 1987.

[B1] J. Bell. *Lectures on the Foundations of Mathematics.*

[B2] J. Bell. *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy.* Polimetrica, 2005.

[B3] J. Bell. *Dissenting Voices. Divergent Conceptions of the Continuum in 19th and Early 20th Century Mathematics and Philosophy.*

[B4] J. Bell. *Continuity and Infinitesimals.*

[Ch] T. Chow. *Forcing for dummies.*

[Ch1] T.Chow. *A beginner's guide to forcing*, Contemp. Math.

[C] J. Conway. *On Numbers and Games, 2nd ed.*, 2001.

[D] H. Dales and W. Woodin. *Super-Real Fields.* Clarendon Press, 1996.

[Ehr] P. Ehrlich. *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes.* Arch. Hist. Exact Sci. 60 (2006) 1-121.

[G] R. Goldblatt. *Lectures on the Hyperreals.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[H] E. Hewitt. *Rings of real-valued continuous functions, I.* Trans. Amer. Math. Soc. 64, 1948.

[Ho] E. Hobson. *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series.* Cambridge University Press, 1907.

[Ke] H. Keisler. *Elementary Calculus.* Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

[Kl] *Kurt Gödel. A Biographical Memoir by Stephen C. Kleene.* Nat. Acad. of Scien., 1987.

[Ku] K. Kunen. *Set Theory, An introduction to independence proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Company, 1980.

[L] T. Lindstrøm. *An Invitation to Nonstandard Analysis.* In: N.Cutland. Nonstandard analysis and its applications. - Cambridge University Press, 1988.

[MR] I. Moerdijk, G.E. Reyes. *Models for Smotth infinitesimal Analysis.* Springer-Verlag, 1991.

[N] E. Nelson. *Internal Set Theory: a New Approach to Nonstandard Analysis.* Bull. Amer. Math. Soc., 83, N6, 1977.

[P] *The Princeton Companion to Mathematics.* Ed. by T. Gowers. Princeton University Press, 2008.

[T] D. Tall. *Intuitive Infinitesimals in Calculus* http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1980c-intuitiveinfls.pdf

[Ve] R. Vesley. *An Intuitionistic Infinitesimal Calculus.* Lect. Notes in Math., 873, pp.208-212, 1981.

[W] H. Weyl. *The Continuum: A Critical Examenation of the Foundation of Analysis.* Dover Publications, 1994.

[А-Л] С. Альбеверио, Й. Фенстад, Р. Хеэг-Крон, Т. Линдстрем. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М., Мир, 1990.

[Г] П. Гайденко. *История греческой философии в её связи с наукой.* Пер Сэ, 2000.

[Д] М. Девис. *Прикладной нестандартный анализ.* М., Мир, 1980.

[Дд] Р. Дедекинд. *Непрерывность и иррациональные числа.* – М.: Книжный дом "Либроком", 2009.

[Ко] П. Коэн. *Теория множеств и континуум-гипотеза.* М., Мир, 1969.

[K] Т. Кудрик. *Нестандартний аналіз.* Лекції. Львів, 2007.

[KK] А. Кусраев, С. Кутателадзе. *Нестандартные методы анализа.* Новосибирск, Наука, 1990.

[Г-К] Е. Гордон, А. Кусраев, С. Кутателадзе. *Инфинитезимальный анализ.* Новосибирск, Наука, 2001.

[Ma] Ю. Манин. *Математика как метафора.* М., МЦНМО, 2008.

[M1] Ф.А.Медведев. Развитие теории множеств в XIX в. М., Наука, 1965.

[M2] Ф.А.Медведев. Развитие понятия интеграла. М., Наука, 1974.

[M3] Ф.А.Медведев. Очерки истории теории функций действительного переменного. М., Наука, 1975.

[M4] Ф.А.Медведев. Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX-XX вв. М., Наука, 1976.

[M5] Ф.А.Медведев. Ранняя история аксиомы выбора. М., Наука, 1982.

ЗМІСТ