

УДК 515.12

Т.О. БАНАХ

**ТОПОЛОГИЯ ПРОСТРАНСТВ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР, I:  
ФУНКТОРЫ  $\mathcal{P}_\tau$  И  $\hat{P}$ .**

T.Banakh. *Topology of probability measure spaces, I: functors  $\mathcal{P}_\tau$  and  $\hat{P}$* , Mat. Stud. 5:1-2 (1995) 65–87.

For a Tychonoff space  $X$ , the constructions  $\hat{P}(X)$  and  $\mathcal{P}_\tau(X)$  of the spaces of probability Radon measures and probability  $\tau$ -smooth measures on  $X$  are considered. It is proved that the constructions  $\hat{P}$  and  $\mathcal{P}_\tau$  determine functors in the category of Tychonoff spaces, which extend the functor  $P$  of probability measures in the category of compacta. In this part we investigate general topological properties of the spaces  $\hat{P}(X)$  and  $\mathcal{P}_\tau(X)$ , as well as categorial properties of the functors  $\hat{P}$  and  $\mathcal{P}_\tau$ .

Т.Банах. *Топология пространств вероятностных мер, I: Функциоры  $\mathcal{P}_\tau$  и  $\hat{P}$* . // Мат. Студії. — 1995. — Т.5, №1-2. — С.65–87.

**ВВЕДЕНИЕ**

Пространства вероятностных мер – классический объект, изучаемый с различных точек зрения в теории меры, функциональном анализе, теории вероятностей, топологии, теории категорий. Данная статья является первой частью большой работы (результаты которой анонсированы в [1]), посвященной изучению пространств вероятностных мер на топологических пространствах, в частности, пространств вероятностных  $\tau$ -гладких и вероятностных радоновских мер. Наши интересы затрагивают, в основном, топологические и категорные аспекты теории меры и наиболее созвучны обзору [2], где изучается функтор  $P : \mathcal{Comp} \rightarrow \mathcal{Comp}$  пространства вероятностных мер в категории компактов (мы будем использовать современную терминологию, подразумевая под словом “компакт” компактное хаусдорфово пространство).

В связи с изучением пространств вероятностных мер, естественно возникает проблема продолжения функтора  $P$  с категории компактов на более широкие категории, в частности, на категорию *Tych* тихоновских пространств и их непрерывных отображений.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 18B30, 28A33, 28C15, 54B30, 54H05.

Дане дослідження підтримане Державним комітетом по науці і технологіях України

Одно из таких продолжений  $P_\beta$  предложил А.Ч. Чигогидзе [3]: Для тихоновского пространства  $X$  рассмотрим пространство  $P_\beta(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid \text{supp}(\mu) \subset X \subset \beta X\}$ , где  $\beta X$  – стоун-чеховская компактификация  $X$ , а  $\text{supp}(\mu)$  – носитель меры  $\mu$ . Конструкция  $P_\beta(X)$  порождает функтор  $P_\beta : \mathcal{Tych} \rightarrow \mathcal{Tych}$ , продолжающий функтор  $P : \mathcal{Compr} \rightarrow \mathcal{Compr}$ . Другая конструкция рассмотрена в [2] В.В. Федорчуком, который отметил, что функтор  $P \circ \beta : \mathcal{Tych} \rightarrow \mathcal{Compr}$ , ставящий в соответствие тихоновскому пространству  $X$  пространство  $P(\beta X)$  тоже продолжает функтор  $P : \mathcal{Compr} \rightarrow \mathcal{Compr}$ .

Функторы  $P_\beta$  и  $P \circ \beta$ , однако, обладают рядом недостатков. В частности, пространство  $P_\beta(X)$  слишком узко и не содержит многих естественных счетно-аддитивных мер на  $X$  (мер, носитель которых некомпактен), а пространство  $P(\beta X)$ , напротив, слишком широко, содержит все конечно-аддитивные меры на  $X$ , и в результате, функтор  $P \circ \beta$  не сохраняет многих специфических свойств пространства  $X$ , в частности, сильно поднимает вес (хотя и не поднимает плотности).

Таким образом, естественно рассматривать пространства мер, промежуточные между пространствами  $P_\beta(X)$  и  $P(\beta X)$ .

С этой целью, для тихоновского пространства  $X$  рассмотрим следующие два пространства вероятностных мер:

$$\hat{P}(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid \mu_*(X) = 1\} \quad \text{и} \quad P_\tau(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid \mu^*(X) = 1\},$$

где  $\mu_*(X) = \sup\{\mu(B) \mid X \supset B - \text{борелевское подмножество } \beta X\}$  и  $\mu^*(X) = \inf\{\mu(B) \mid X \subset B - \text{борелевское подмножество } \beta X\}$  – соответственно нижняя и верхняя  $\mu$ -меры множества  $X$  в  $\beta X$ . (В дань исторической традиции, мы используем обозначения  $\hat{P}(X)$  и  $P_\tau(X)$ , а не  $P_*(X)$  и  $P^*(X)$ , которые, казалось-бы, более естественны). Очевидно, что  $P_\beta(X) \subset \hat{P}(X) \subset P_\tau(X) \subset P(\beta X)$  для каждого тихоновского пространства  $X$ , и  $P_\beta(X) = \hat{P}(X) = P_\tau(X) = P(\beta X)$ , если пространство  $X$  компактно.

Меры, принадлежащие пространствам  $\hat{P}(X)$  и  $P_\tau(X)$ , допускают эквивалентные описания как в терминах счетно-аддитивных мер на пространстве  $X$ , так и в терминах линейных функционалов на банаховом пространстве  $C_b(X)$  ограниченных непрерывных действительных функций на  $X$ . Прежде чем привести точные формулировки, напомним некоторые определения.

Счетно-аддитивная конечная мера  $\mu$ , определенная на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}(X)$  борелевских подмножеств топологического пространства  $X$ , называется

- (i) *вероятностной*, если  $\mu(X) = 1$ ;
- (ii) *регулярной*, если  $\mu(A) = \sup\{\mu(Z) \mid A \supset Z - \text{замкнутое подмножество } X\}$  для каждого борелевского подмножества  $A \subset X$ ;
- (iii) *радоновской*, если  $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid A \supset K - \text{компактное подмножество } X\}$  для каждого борелевского подмножества  $A \subset X$  (в [4] радоновские меры называются плотными мерами);

- (iv)  $\tau$ -гладкой, если для любой монотонно убывающей направленности  $\{Z_\alpha\}$  замкнутых подмножеств  $X$  с пустым пересечением  $\bigcap_\alpha Z_\alpha$ , числовая направленность  $\{\mu(Z_\alpha)\}$  стремится к нулю (см. [4]).

Далее под мерой на топологическом пространстве мы будем подразумевать счетно-аддитивную борелевскую меру. Легко видеть, что каждая радоновская мера на хаусдорфовом пространстве регулярная и  $\tau$ -гладкая. Более того, регулярная мера  $\mu$  на хаусдорфовом пространстве  $X$  является радоновской тогда и только тогда, когда

$$\mu(X) = \sup\{\mu(K) \mid K - \text{компактное подмножество } X\}.$$

Пусть  $X$  – тихоновское пространство. Для каждой меры  $\mu \in P_\tau(X)$  определим меру  $\tilde{\mu}$  на  $X$  формулой  $\tilde{\mu}(A) = \mu^*(A) = \inf\{\mu(B) \mid A \subset B - \text{борелевское подмножество } \beta X\}$ , где  $A$  – борелевское подмножество  $X$ . Известно [5], либо [2, 1.11] (см. также замечание 1.2), что, определенная таким образом мера  $\tilde{\mu}$  на  $X$  является  $\tau$ -гладкой. Обратно, каждая вероятностная  $\tau$ -гладкая мера  $\tilde{\mu}$  на  $X$  определяет меру  $\mu \in P_\tau(X)$ , посредством формулы  $\mu(A) = \tilde{\mu}(A \cap X)$ , где  $A \in \mathcal{B}(\beta X)$ . При этом соответствии, радоновские меры и только они переходят в меры на  $\beta X$ , принадлежащие множеству  $\hat{P}(X)$ . Поэтому меры из множества  $\hat{P}(X)$  мы будем называть радоновскими, а из множества  $P_\tau(X)$  –  $\tau$ -гладкими.

Через  $C_b(X)$  обозначим банахово пространство всех ограниченных непрерывных на  $X$  вещественных функций, наделенное нормой  $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ ,  $f \in C_b(X)$ . Не вдаваясь в определение интеграла, заметим, что всякая вероятностная регулярная мера  $\mu$  на  $X$  однозначно задает интеграл  $\int_\mu$  – неотрицательный линейный функционал на  $C_b(X)$  с единичной нормой (значение интеграла  $\int_\mu$  на функции  $f$  мы будем обозначать через  $\int_\mu f$ , либо просто через  $\mu(f)$ ). При этом (см. [4])

- (i) мера  $\mu$  –  $\tau$ -плотная тогда и только тогда, когда  $\mu(f_\alpha) \rightarrow 0$  для всякой монотонно убывающей направленности  $\{f_\alpha\} \subset C_b(X)$ , поточечно сходящейся к нулю;
- (ii) мера  $\mu$  – радоновская тогда и только тогда, когда  $\mu(f_\alpha) \rightarrow 0$  для любой направленности  $\{f_\alpha\} \subset C_b(X)$  равномерно на компактах стремящейся к нулю и состоящей из функций, ограниченных в совокупности.

Аналогично, мера  $\mu \in P(\beta X)$  принадлежит множеству  $P_\tau(X)$  тогда и только тогда, когда  $\mu(f_\alpha) \rightarrow 0$  для всякой монотонно убывающей направленности  $\{f_\alpha\} \subset C(\beta X)$ , поточечно сходящейся к нулю на множестве  $X \subset \beta X$ .

Покажем, что конструкции пространств  $P_\tau(X)$  и  $\hat{P}(X)$  функториальны в категории  $\mathcal{Tych}$ . Поскольку  $\hat{P}(X) \subset P_\tau(X) \subset P(\beta X)$  для каждого тихоновского пространства  $X$  и  $P \circ \beta : \mathcal{Tych} \rightarrow \mathcal{Comp}$  – функтор на категории  $\mathcal{Tych}$  тихоновских пространств [2], то для проверки функториальности конструкций  $\hat{P}$  и  $P_\tau$ , достаточно показать, что для любого непрерывного отображения  $f : X \rightarrow Y$  тихоновских пространств  $P(\beta f)(P_\tau(X)) \subset P_\tau(Y)$  и  $P(\beta f)(\hat{P}(X)) \subset \hat{P}(Y)$ , где  $\beta f : \beta X \rightarrow \beta Y$  – стоун-чеховская компактификация отображения  $f$  (см. [6, 3.66]). Если  $\mu \in P_\tau(X)$ , то  $\mu^*(X) = 1$ , и, следовательно,  $\mu(B) = 1$

для всякого борелевского множества  $B$ ,  $X \subset B \subset \beta X$ . Тогда для любого борелевского множества  $B'$ ,  $Y \subset B' \subset \beta Y$ ,  $P(\beta f)(\mu)(B') = \mu((\beta f)^{-1}(B')) = 1$ , ибо  $(\beta f)^{-1}(B')$  – борелевское подмножество  $\beta X$ , содержащее  $X$ . Отсюда следует, что  $P(\beta f)(\mu) \in P_\tau(Y)$ , т.е.  $P(\beta f)(P_\tau(X)) \subset P_\tau(Y)$ .

Если  $\mu \in \hat{P}(X)$ , тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой компакт  $K \subset X$ , что  $\mu(K) > 1 - \varepsilon$ . Тогда  $f(K) \subset Y$  – компакт в  $Y$  такой, что  $P(\beta f)(\mu)(f(K)) = \mu((\beta f)^{-1}(f(K))) \geq \mu(K) > 1 - \varepsilon$ . Следовательно, мера  $P(\beta f)(\mu)$  принадлежит множеству  $\hat{P}(Y)$ , т.е.  $P(\beta f)(\hat{P}(X)) \subset \hat{P}(Y)$ . Положим  $P_\tau(f) = P(\beta f)|_{P_\tau(X)} : P_\tau(X) \rightarrow P_\tau(Y)$  и  $\hat{P}(f) = P(\beta f)|_{\hat{P}(X)} : \hat{P}(X) \rightarrow \hat{P}(Y)$ . Таким образом, нами доказана

**Теорема 0.1.** *Конструкции  $P_\tau$  и  $\hat{P}$  являются ковариантными функторами в категории  $\mathcal{Tych}$  тихоновских пространств и их непрерывных отображений, продолжающими функтор  $P : \mathcal{Com} \rightarrow \mathcal{Com}$ .*

Отметим, что мы могли определить функторы  $P_\tau : \mathcal{Tych} \rightarrow \mathcal{Tych}$  и  $\hat{P} : \mathcal{Tych} \rightarrow \mathcal{Tych}$  внутренним образом, без привлечения стоун-чеховских компактификаций. Именно, для тихоновского пространства  $X$  пространство  $P_\tau(X)$  состоит из вероятностных регулярных  $\tau$ -гладких мер на  $X$ , а топология на  $P_\tau(X)$  порождается предбазисом, состоящим из множеств вида  $\{\mu \in P_\tau(X) : |\mu(\varphi) - \mu_0(\varphi)| < 1\}$ , где  $\mu_0 \in P_\tau(X)$  и  $\varphi \in C_b(X)$ . Если  $f : X \rightarrow Y$  – непрерывное отображение тихоновских пространств, то отображение  $P_\tau(f) : P_\tau(X) \rightarrow P_\tau(Y)$  определяется формулой  $P_\tau(f)(\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$ , где  $\mu \in P_\tau(X)$  и  $A$  – борелевское подмножество  $Y$ . Тогда  $\hat{P}(X)$  – подпространство  $P_\tau(X)$ , состоящее из вероятностных радоновских мер, а  $\hat{P}(f)$  – ограничение отображения  $P_\tau(f)$  на множество  $\hat{P}(X)$ . Используя обходной путь (через стоун-чеховские компактификации) мы избавились от необходимости проверки того, что определенные таким образом конструкции  $P_\tau$  и  $\hat{P}$  действительно определяют функторы в категории  $\mathcal{Tych}$ .

Прежде чем перейти к изложению конкретных результатов, отметим, что для ряда пространств, например для пространств  $X$ , которые являются борелевскими множествами в своей стоун-чеховской компактификации, каждая  $\tau$ -гладкая мера является радоновской. В этом случае, пространства  $P_\tau(X)$  и  $\hat{P}(X)$  совпадают. Более общо, это имеет место для так называемых универсально измеримых пространств, то есть пространств  $X$ , которые измеримы в некоторой компактификации  $\gamma X$  относительно любой меры  $\mu \in P(\gamma X)$ . Кроме абсолютных борелевских пространств, абсолютно измеримыми являются, например, аналитические и коаналитические пространства [7, 2.2.12].

## 1 КАТЕГОРНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКТОРА $P_\tau$

В этом параграфе мы исследуем категорные свойства функтора  $P_\tau$ , а также некоторые общетопологические свойства пространств  $P_\tau(X)$ .

Начнем мы со следующего простого замечания.

**Лемма 1.1.** *Пусть  $X$  – тихоновское пространство. Если  $\mu \in P_\tau(X)$ , тогда  $\mu(A) = \mu(B)$  для любых двух борелевских подмножеств  $A, B \subset \beta X$  таких, что  $A \cap X = B \cap X$ .*

*Доказательство.* Пусть  $A, B \subset \beta X$  – такие борелевские множества, что  $A \cap X = B \cap X$ . Тогда  $|\mu(A) - \mu(B)| = |\mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) - \mu(A \cap B) - \mu(B \setminus A)| = |\mu(A \setminus B) - \mu(B \setminus A)| \leq \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) = \mu((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$ . Поскольку  $A \cap X = B \cap X$ , то  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset \beta X \setminus X$ . Если  $\mu \in P_\tau(X)$ , тогда  $\mu_*(\beta X \setminus X) = 0$ , следовательно,  $\mu(A \Delta B) = \mu_*(A \Delta B) \leq \mu_*(\beta X \setminus X) = 0$ , а значит,  $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \Delta B) = 0$ , т.е.  $\mu(A) = \mu(B)$ . Лемма доказана.  $\square$

**Замечание 1.2.** Из леммы 1.1 вытекает следующий факт, о котором уже упоминалось во введении: каждая мера  $\mu \in P_\tau(X)$  порождает вероятностную меру  $\tilde{\mu}$  на  $X$ , посредством формулы  $\tilde{\mu}(A) = \mu(B)$ , где  $B$  – любое борелевское подмножество  $\beta X$  такое, что  $B \cap X = A$ , а  $A$  – борелевское подмножество  $X$ . При этом, мера  $\tilde{\mu}$  является  $\tau$ -гладкой. Действительно, для каждой монотонно убывающей направленности  $\{Z_\alpha\}$  непустых замкнутых множеств  $X$ , с пустым пересечением, направленность  $\{\bar{Z}_\alpha\}$  их замыканий в  $\beta X$  также монотонно убывает. Далее, поскольку  $\{\bar{Z}_\alpha\}$  – центрированное семейство замкнутых подмножеств компакта  $\beta X$ , то оно имеет непустое пересечение  $Z = \bigcap_\alpha \bar{Z}_\alpha$  [6, 3.1.1]. Поскольку  $Z \cap X = (\bigcap_\alpha \bar{Z}_\alpha) \cap X = \bigcap_\alpha (\bar{Z}_\alpha \cap X) = \bigcap_\alpha Z_\alpha = \emptyset$ , то  $Z \subset \beta X \setminus X$ . Вспоминая, что  $\mu \in P_\tau(X)$ , получаем  $\mu(Z) = 0$ . Из регулярности меры  $\mu$  следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое открытое множество  $U$ ,  $Z \subset U \subset \beta X$ , что  $\mu(U) < \varepsilon$ . Из [6, 3.1.5] вытекает, что поскольку  $\bigcap_\alpha \bar{Z}_\alpha = Z \subset U$ , то  $Z_{\alpha_0} \subset U$  для некоторого  $\alpha_0$ . Следовательно,  $\mu(\bar{Z}_{\alpha_0}) \leq \mu(U) < \varepsilon$ , а значит,  $\tilde{\mu}(Z_{\alpha_0}) = \mu(\bar{Z}_{\alpha_0}) < \varepsilon$ . Поскольку направленность  $\{Z_\alpha\}$  монотонно убывает, то  $\tilde{\mu}(Z_\beta) \leq \tilde{\mu}(Z_{\alpha_0}) < \varepsilon$  для всех  $\beta \geq \alpha_0$ . Но это значит, что числовая направленность  $\{\tilde{\mu}(Z_\alpha)\}$  стремится к нулю, т.е. мера  $\tilde{\mu}$  на  $X$  –  $\tau$ -гладкая.

Напомним, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  топологических пространств называется совершенным, если оно замкнуто и прообраз  $f^{-1}(y)$  каждой точки  $y \in Y$  является компактом.

**Теорема 1.3.** *Функтор  $P_\tau : Tych \rightarrow Tych$  сохраняет класс совершенных отображений.*

*Доказательство.* Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – совершенное отображение тихоновских пространств. Тогда продолжение  $\beta f : \beta X \rightarrow \beta Y$  отображения  $f$  (которое мы далее будем называть стоун-чеховской компактификацией отображения  $f$ ) обладает следующим свойством:  $\beta f(\beta X \setminus X) \subset \beta Y \setminus Y$  [6, 3.7.15]. Рассмотрим отображение  $P(\beta f) : P(\beta X) \rightarrow P(\beta Y)$ . Мы докажем, что  $P(\beta f)(P(\beta X) \setminus P_\tau(X)) \subset P(\beta Y) \setminus P_\tau(Y)$ . Действительно, пусть  $\mu \in P(\beta X) \setminus P_\tau(X)$ , т.е.  $\mu^*(X) < 1$ . Это значит, что существует такой компакт  $K \subset \beta X \setminus X$ , что  $\mu(K) > 0$ . Тогда  $\beta f(K) \subset \beta Y \setminus Y$  – такой компакт, что  $P(\beta f)(\mu)(\beta f(K)) = \mu((\beta f)^{-1}(\beta f(K))) \geq \mu(K) > 0$ . Следовательно,  $P(\beta f)(\mu)^*(Y) < 1$ , т.е.  $P(\beta f)(\mu) \notin P_\tau(Y)$ . Таким образом,  $P(\beta f)(P(\beta X) \setminus P_\tau(X)) \subset P(\beta Y) \setminus P_\tau(Y)$ . Поскольку  $P(\beta f) : P(\beta X) \rightarrow P(\beta Y)$  – отображение компактов, то из последнего включения следует, что отображение  $P_\tau(f) = P(\beta f)|_{P_\tau(X)} : P_\tau(X) \rightarrow P_\tau(Y)$  – совершенно. Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 1.4.** *Функтор  $P_\tau : Tych \rightarrow Tych$  сохраняет класс вложений.*

*Доказательство.* Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – топологическое вложение тихоновских пространств и  $\beta f : \beta X \rightarrow \beta Y$  – стоун-чеховская компактификация отображения  $f$ . Легко видеть, что  $\beta f(\beta X \setminus X) \subset \beta Y \setminus f(X)$ . Положим  $A = \{\mu \in P(\beta Y) \mid \mu^*(f(X)) = 1\}$ . Аналогично доказательству теоремы 1.3, можно показать, что  $P(\beta f)(P(\beta X) \setminus P_\tau(X)) \subset P(\beta Y) \setminus A$ . Ясно, что  $P(\beta f)(P_\tau(X)) \subset A$ . Таким образом, отображение  $P_\tau(f) = P(\beta f)|_{P_\tau(X)} : P_\tau(X) \rightarrow A$  – собственнo. Покажем, что оно также инъективно, откуда будет следовать, что  $P_\tau(f) : P_\tau(X) \rightarrow P_\tau(Y)$  – вложение.

Пусть  $\mu, \eta \in P_\tau(X)$  – две различные меры. Тогда существует такое замкнутое множество  $Z \subset \beta X$ , что  $\mu(Z) \neq \eta(Z)$ . Мы утверждаем, что  $P_\tau(f)(\mu)(\beta f(Z)) \neq P_\tau(f)(\eta)(\beta f(Z))$ , откуда будет следовать, что меры  $P_\tau(f)(\mu), P_\tau(f)(\eta) \in P_\tau(Y)$  различны. Действительно, положив  $Z' = (\beta f)^{-1}(\beta f(Z))$ , отметим, что, по определению,  $P_\tau(f)(\mu)(\beta f(Z)) = \mu(Z')$  и  $P_\tau(f)(\eta)(\beta f(Z)) = \eta(Z')$ . Поскольку  $f$  – вложение, то  $Z' \cap X = Z \cap X$ . Тогда, согласно лемме 1.1,  $P_\tau(f)(\mu)(\beta f(Z)) = \mu(Z') = \mu(Z) \neq \eta(Z) = \eta(Z') = P_\tau(f)(\eta)(\beta f(Z))$ , т.е. меры  $P_\tau(f)(\mu), P_\tau(f)(\eta) \in P_\tau(Y)$  различны. Теорема доказана.  $\square$

Из теорем 1.3, 1.4 немедленно вытекает

**Следствие 1.5.** *Функтор  $P_\tau : Tych \rightarrow Tych$  сохраняет класс замкнутых вложений.*

Поскольку функтор  $P_\tau$  сохраняет вложения, то для пары  $X \subset Y$  тихоновских пространств мы будем отождествлять пространство  $P_\tau(X)$  с подмножеством  $\{\mu \in P_\tau(Y) \mid \mu^*(X) = 1\}$  в  $P_\tau(Y)$ . Отметим, что при этом отождествлении, множество  $\hat{P}(X) \subset P_\tau(X)$ , состоящее из вероятностных радоновских мер на  $X$  переходит в подмножество  $\{\mu \in P_\tau(Y) \mid \mu_*(X) = 1\} \subset P_\tau(Y)$ . Отметим также, что из теоремы 1.4 следует, что конструкция пространства  $P_\tau(X)$  фактически не зависит от компактификации  $X$ , т.е. для любой компактификации  $\gamma X$  пространства  $X$  пространство  $\{\mu \in P(\gamma X) \mid \mu^*(X) = 1\}$  естественно гомеоморфно  $P_\tau(X)$ . Как мы увидим в §2, при этом гомеоморфизме, множество  $\{\mu \in P(\gamma X) \mid \mu_*(X) = 1\}$  переводится в пространство  $\hat{P}(X)$  вероятностных радоновских мер на  $X$ .

Напомним, что носителем меры  $\mu \in P(X)$  на компактном пространстве  $X$  называется множество  $\text{supp}(\mu) = \bigcap \{F \mid F \text{ – замкнутое подмножество } X \text{ такое, что } \mu(F) = 1\}$ . При этом выполняется условие  $\mu(\text{supp}(\mu)) = 1$ , т.е. носитель меры  $\mu$  – это наименьшее замкнутое множество единичной  $\mu$ -меры. Если  $X$  – тихоновское пространство, то под носителем вероятностной  $\tau$ -гладкой меры  $\mu \in P_\tau(X)$  на  $X$  мы иногда будем подразумевать также множество  $\text{supp}(\mu) \cap X$ .

Автору не известно, сохраняет ли функтор  $P_\tau$  инъективные отображения. Что касается отображений сюръективных, то функтор  $P_\tau$  их, вообще говоря, не сохраняет. Это видно из следующего примера: пусть  $f : D \rightarrow [0, 1]$  – биективное отображение дискретного пространства  $D$  на отрезок  $[0, 1]$ . Тогда стандартная мера Лебега на  $[0, 1]$  не имеет прообраза при отображении  $P_\tau(f) : P_\tau(D) \rightarrow P[0, 1]$ . Это следует из того, что множество  $D$ , являясь открытым в своей стоун-чеховской компактификации, измеримо относительно любой меры  $\mu \in P(\beta D)$ . Следовательно, любая  $\tau$ -гладкая мера на  $D$

является радоновской, и, поскольку пространство  $D$  дискретно, атомарной (об атомарных мерах см. [8, §2]). Но образ атомарной меры при отображении  $P_\tau(f)$  – мера атомарная, и, следовательно, не равна мере Лебега на  $[0, 1]$ .

Вместе с тем, функтор  $P_\tau$  сохраняет одно свойство отображений, из которого, в компактном случае, вытекает сюръективность.

**Предложение 1.6.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – отображение, для которого образ  $f(X)$  всюду плотен в  $Y$ . Тогда образ  $P_\tau(f)(P_\tau(X))$  всюду плотен в  $P_\tau(Y)$ .

*Доказательство.* Очевидно, что образ  $P_\tau(f)(P_\tau(X))$  содержит множество  $P_\omega(f(X)) = \{\mu \in Y : |\text{supp}(\mu)| < \infty \text{ и } \text{supp}(\mu) \subset f(X)\}$ , которое всюду плотно в  $P(\beta Y) \supset P_\tau(Y)$ .  $\square$

**Теорема 1.7.** Функтор  $P_\tau$  сохраняет прообразы, т.е. для любого отображения  $f : X \rightarrow Y$  тихоновских пространств и любого подмножества  $A \subset Y$   $P_\tau(f)^{-1}(P_\tau(A)) = P_\tau(f^{-1}(A))$ .

*Доказательство.* Включение  $P_\tau(f^{-1}(A)) \subset P_\tau(f)^{-1}(P_\tau(A))$  тривиально. Покажем, что  $P_\tau(f)^{-1}(P_\tau(A)) \subset P_\tau(f^{-1}(A))$ . Это будет следовать из вложения

$$P_\tau(f)(P_\tau(X) \setminus P_\tau(f^{-1}(A))) \subset P_\tau(Y) \setminus P_\tau(A).$$

Пусть  $\mu \in P_\tau(X) \setminus P_\tau(f^{-1}(A))$ , т.е.  $\mu^*(f^{-1}(A)) < 1$ . Это значит, что существует такой компакт  $K \subset X \setminus f^{-1}(A)$ , что  $\mu(K) > 0$ . Тогда  $f(K)$  – компакт в  $Y \setminus A$  такой, что  $P_\tau(f)(\mu)(f(K)) = \mu(f^{-1}(f(K))) \geq \mu(K) > 0$ , т.е.  $P_\tau(f)(\mu)(A) < 1$ , и, как следствие,  $P_\tau(f)(\mu) \notin P_\tau(A)$ . Теорема доказана.  $\square$

Говорят, что сохраняющий вложения функтор  $F : Tych \rightarrow Tych$  сохраняет (замкнутые) пересечения, если для любого тихоновского пространства  $X$  и семейства  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  его (замкнутых) подмножеств выполняется равенство  $F(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} F X_\alpha$ .

**Замечание 1.8.** В отличие от функтора  $\hat{P}$ , который сохраняет счетные пересечения (см. теорему 2.15), функтор  $P_\tau$  не сохраняет даже конечных пересечений. Это видно из следующего примера: пусть  $X \subset [0, 1]$  – подмножество отрезка с  $\lambda^*(X) = 1$  и  $\lambda_*(X) = 0$ , где  $\lambda$  – стандартная мера Лебега на  $[0, 1]$ . Тогда  $\lambda^*([0, 1] \setminus X) = 1$ . Следовательно,  $\lambda \in P_\tau(X) \cap P_\tau([0, 1] \setminus X)$ . Однако,  $P_\tau(X \cap ([0, 1] \setminus X)) = P_\tau(\emptyset) = \emptyset$ .

Вместе с тем, справедливо

**Предложение 1.9.** Пусть  $X$  – тихоновское пространство и  $A, B \subset X$  – два его подмножества, одно из которых борелевское. Тогда  $P_\tau(A \cap B) = P_\tau(A) \cap P_\tau(B)$ .

*Доказательство.* Предположим для определенности, что множество  $B \subset X$  – борелевское. Пусть  $\tilde{B} \subset \beta X$  – такое борелевское подмножество  $\beta X$ , что  $\tilde{B} \cap X = B$ . Очевидно, что  $P_\tau(A \cap B) \subset P_\tau(A) \cap P_\tau(B) \subset P_\tau(A) \cap P_\tau(\tilde{B})$ . Покажем, что выполняется также и обратное включение. Зафиксируем меру  $\mu \in P_\tau(A) \cap P_\tau(\tilde{B})$  и отметим, что  $A \cap B = A \cap \tilde{B}$ .

Чтобы доказать, что  $\mu \in P_\tau(A \cap B)$  достаточно показать, что  $\mu^*(A \cap \tilde{B}) = 1$ . Пусть  $K \subset \beta X$  – любой компакт такой, что  $K \subset \beta X \setminus (A \cap \tilde{B}) = (\beta X \setminus A) \cup (\beta X \setminus \tilde{B})$ . Наша цель – показать, что  $\mu(K) = 0$ . Представим компакт  $K$  в виде объединения  $K = K_1 \cup K_2$  двух борелевских множеств  $K_1 = K \setminus \tilde{B}$  и  $K_2 = K \cap \tilde{B}$ . Поскольку  $\mu \in P_\tau(\tilde{B})$ , то  $\mu(K_1) = 0$ . Далее, отметим, что  $K_2 \subset \beta X \setminus A$ . Поскольку  $\mu \in P_\tau(A)$  и  $K_2$  – борелевское подмножество такое, что  $K_2 \cap A = \emptyset$ , то  $\mu(K_2) = 0$ . Следовательно,  $\mu(K) = \mu(K_1) + \mu(K_2) = 0$ . Таким образом,  $\mu \in P_\tau(A \cap B)$ , и значит,  $P_\tau(A \cap B) = P_\tau(A) \cap P_\tau(B)$ . Предложение доказано.  $\square$

**Теорема 1.10.** *Функтор  $P_\tau : Tych \rightarrow Tych$  сохраняет пересечения замкнутых подмножеств, т.е. для любого тихоновского пространства  $X$  и его замкнутых подмножеств  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ ,  $P_\tau(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} P_\tau(X_\alpha)$ .*

*Доказательство.* Включение  $P_\tau(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in A} P_\tau(X_\alpha)$  очевидно. Пусть  $\mu \in \bigcap_{\alpha \in A} P_\tau(X_\alpha)$ . Чтобы доказать, что  $\mu \in P_\tau(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha)$ , нужно показать, что  $\mu^*(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = 1$ , или, что эквивалентно, что для любого борелевского множества  $B \subset \beta X$ ,  $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \subset B$ , выполняется  $\mu(B) = 1$ . Пусть  $\bar{X}_\alpha$  – замыкание множества  $X_\alpha$  в  $\beta X$ . Поскольку множество  $X_\alpha$  замкнуто в  $X$ , то  $\bar{X}_\alpha \cap X = X_\alpha$ . Поскольку  $\mu \in P_\tau(X_\alpha)$  для каждого  $\alpha$ , то  $\mu(\bar{X}_\alpha) = \mu^*(\bar{X}_\alpha) = 1$ . Как следствие,  $\text{supp}(\mu) \subset \bigcap_{\alpha \in A} \bar{X}_\alpha$ . Поскольку  $\mu(\text{supp}(\mu)) = 1$ , то  $\mu(\bigcap_{\alpha \in A} \bar{X}_\alpha) = 1$ . Поскольку множество  $\bigcap_{\alpha \in A} \bar{X}_\alpha \subset \beta X$  – замкнуто и  $(\bigcap_{\alpha \in A} \bar{X}_\alpha) \cap X = \bigcap_{\alpha \in A} (\bar{X}_\alpha \cap X) = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ , то для каждого борелевского множества  $B$ ,  $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \subset B \subset \beta X$ , согласно лемме 1.1,  $\mu(B) \geq \mu(\bigcap_{\alpha \in A} \bar{X}_\alpha) = 1$ . Отсюда,  $\mu^*(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = 1$ , т.е.  $\mu \in P_\tau(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha)$ . Теорема доказана.  $\square$

Теперь рассмотрим вопрос непрерывности функтора  $P_\tau$ . Пусть  $A$  – направленное частично упорядоченное множество (направленность означает, что для любых  $\alpha, \beta \in A$  существует такое  $\gamma \in A$ , что  $\gamma \geq \alpha$  и  $\gamma \geq \beta$ ).

Пусть  $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$  – обратный спектр, индексированный множеством  $A$  и состоящий из тихоновских пространств. Через  $\varprojlim X_\alpha$  мы обозначаем предел этого спектра, а через  $p_\alpha : \varprojlim X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , – предельные проекции. Обратный спектр  $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$  порождает обратный спектр  $\{P_\tau(X_\alpha), P_\tau(p_\alpha^\beta)\}$ , предел которого мы обозначаем через  $\varprojlim P_\tau(X_\alpha)$ , а предельные проекции через  $\text{rg}_\alpha : \varprojlim P_\tau(X_\alpha) \rightarrow P_\tau(X_\alpha)$ . Отображение  $P_\tau(p_\alpha) : P_\tau(\varprojlim X_\alpha) \rightarrow P_\tau(X_\alpha)$  порождает отображение  $R : P_\tau(\varprojlim X_\alpha) \rightarrow \varprojlim P_\tau(X_\alpha)$ .

Хорошо известно, что если все  $X_\alpha$  компактны, тогда отображение  $R$  – гомеоморфизм. Это следует из непрерывности функтора  $P$  в категории компактов [9, VII.3.11].

**Теорема 1.11.** *Отображение  $R : P_\tau(\varprojlim X_\alpha) \rightarrow \varprojlim P_\tau(X_\alpha)$  является вложением. Если предельные проекции  $p_\alpha : \varprojlim X_\alpha \rightarrow X_\alpha$  – плотны (т.е.  $p_\alpha(\varprojlim X_\alpha)$  всюду плотно в  $X_\alpha$ ), тогда образ  $R(P_\tau(\varprojlim X_\alpha))$  всюду плотен в  $\varprojlim P_\tau(X_\alpha)$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим стоун-чеховскую компактификацию  $\{\beta X_\alpha, \beta(p_\alpha^\beta)\}$  спектра  $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$  и отметим, что  $\varprojlim X_\alpha$  вкладывается в  $\varprojlim \beta X_\alpha$ . Причем, если предельные проекции  $p_\alpha : \varprojlim X_\alpha \rightarrow X_\alpha$  плотны, то образ пространства  $\varprojlim X_\alpha$  всюду плотен в  $\varprojlim \beta X_\alpha$ . По непрерывности функтора  $P : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ , соответствующее отображение



$\bar{R} : P(\varprojlim \beta X_\alpha) \rightarrow \varprojlim P(\beta X_\alpha)$  является гомеоморфизмом. Используя тот факт, что функтор  $P_\tau$  сохраняет вложения, получаем, что отображение  $R : P_\tau(\varprojlim X_\alpha) \rightarrow \varprojlim P_\tau(X_\alpha)$  вкладывается в гомеоморфизм  $\bar{R}$  и, следовательно, является вложением. Более того, поскольку функтор  $P_\tau$  сохраняет отображения с всюду плотным образом, то, если предельные проекции  $p_\alpha$  плотны, то образ пространства  $P_\tau(\varprojlim X_\alpha)$  при вложении  $R$  всюду плотен в  $\varprojlim P_\tau(X_\alpha)$ . Теорема доказана.  $\square$

Далее мы рассматриваем свойство сохранения гомотопий, которое, в компактном случае, тесно связано с непрерывностью функторов [10].

Для тихоновских пространств  $X$  и  $Y$  положим  $j_{XY} : P_\tau(X) \times Y \rightarrow P_\tau(X \times Y)$  – отображение, определяемое формулой  $j_{XY}(\mu, y) = P_\tau(i_y)(\mu)$ ,  $\mu \in P_\tau(X)$ ,  $y \in Y$ , где  $i_y : X \rightarrow X \times Y$  – вложение  $X$  в произведение  $X \times Y$  в качестве слоя:  $i_y(x) = (x, y)$ ,  $x \in X$ .

**Предложение 1.12.** *Отображение  $j_{XY} : P_\tau(X) \times Y \rightarrow P_\tau(X \times Y)$  является замкнутым вложением.*

*Доказательство.* Пусть  $X, Y$  – тихоновские пространства и  $\beta X$  и  $\beta Y$  – их стоунчевские компактификации. Согласно [9, VII.5.11 и VII.5.18], отображение  $j_{\beta X, \beta Y} : P(\beta X) \times \beta Y \rightarrow P(\beta \times \beta Y)$  является вложением компактов. Теперь предложение следует из очевидного равенства  $j_{\beta X, \beta Y}(P_\tau(X) \times Y) = j_{\beta X, \beta Y}(P(\beta X) \times \beta Y) \cap P_\tau(X \times Y)$ .  $\square$

**Следствие 1.13.** *Функтор  $P_\tau$  сохраняет гомотопии, т.е. для любой гомотопии  $H_t : X \rightarrow Y$  гомотопия  $P_\tau(H_t) : P_\tau(X) \rightarrow P_\tau(Y)$  непрерывна как отображение  $P_\tau(H_{(\cdot)}) : P_\tau(X) \times [0, 1] \rightarrow P_\tau(Y)$ .*

*Доказательство.* Пусть  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  – гомотопия. Тогда отображение  $P_\tau(H_{(\cdot)}) : P_\tau(X) \times [0, 1] \rightarrow P_\tau(Y)$  – непрерывно, как композиция  $P_\tau(H_{(\cdot)}) = P_\tau(H) \circ j_{X, [0, 1]}$  непрерывных отображений  $j_{X, [0, 1]} : P_\tau(X) \times [0, 1] \rightarrow P_\tau(X \times [0, 1])$  и  $P_\tau(H) : P_\tau(X \times [0, 1]) \rightarrow P_\tau(Y)$ .  $\square$

Напомним определение естественного преобразования функторов. Пусть  $F_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ,  $i = 1, 2$  – два ковариантных функтора из категории  $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$  в категорию  $\mathcal{C}' = (\mathcal{O}', \mathcal{M}')$ . Семейство морфизмов  $\Phi = \{\varphi_X : F_1(X) \rightarrow F_2(X), X \in \mathcal{O}\} \subset \mathcal{M}'$  называется естественным преобразованием функтора  $F_1$  в функтор  $F_2$ , если для всякого морфизма  $f : X \rightarrow Y$  категории  $\mathcal{C}$  коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & F_2(X) \\ F_1(f) \downarrow & & \downarrow F_2(f) \\ F_1(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & F_2(Y). \end{array}$$

Для каждого тихоновского пространства  $X$  положим  $\delta_X : X \rightarrow P_\tau(X)$  – отображение, ставящее в соответствие каждой точке  $x \in X$  меру Дирака  $\delta(x)$ , сосредоточенную в точке  $x$ .

**Теорема 1.14.** Семейство  $\delta = \{\delta_X\}$  определяет естественное преобразование тождественного функтора  $\text{Id} : \mathcal{T}uch \rightarrow \mathcal{T}uch$  в функтор  $P_\tau : \mathcal{T}uch \rightarrow \mathcal{T}uch$ , причем каждая компонента  $\delta_X : X \rightarrow P_\tau(X)$  является замкнутым вложением.

*Доказательство.* Тривиально проверяется, что  $\delta = \{\delta_X\}$  – естественное преобразование функтора  $\text{Id}$  в функтор  $P_\tau$ . То, что каждое отображение  $\delta_X : X \rightarrow P_\tau(X)$  является замкнутым вложением следует из [4, II, §3].  $\square$

**Теорема 1.15.** Функтор  $P_\tau$  сохраняет плотность тихоновских пространств, т.е.  $d(P_\tau(X)) = d(X)$  для любого бесконечного тихоновского пространства  $X$ .

*Доказательство.* Пусть  $A \subset X$  всюду плотное подмножество мощности  $d(X)$  в бесконечном тихоновском пространстве  $X$ . Тогда множество  $B = \{\sum_{i=1}^n r_i \delta(x_i) \mid n \in \mathbb{N} \text{ и для каждого } 1 \leq i \leq n \text{ } r_i \text{ – рационально и } x_i \in A\}$  – всюду плотно в  $P_\tau(X)$ . Кроме того, ясно, что мощность множества  $B$  равна  $d(X)$ .  $\square$

**Теорема 1.16.** Функтор  $P_\tau$  сохраняет вес тихоновских пространств, т.е.  $w(P_\tau(X)) = w(X)$  для любого бесконечного тихоновского пространства  $X$ .

*Доказательство.* Пусть  $X$  – бесконечное тихоновское пространство. Согласно [6, 3.5.2], существует такая компактификация  $cX$  пространства  $X$ , что  $w(cX) = w(X)$ . По теореме 1.4, пространство  $P_\tau(X)$  вкладывается в компакт  $P_\tau(cX) = P(cX)$ . Поскольку функтор  $P$  сохраняет вес [9, VII.3.9], то  $w(P(cX)) = w(cX) = w(X)$ . Следовательно,  $w(P_\tau(X)) \leq w(X)$ , и, поскольку  $X$  вкладывается в  $P_\tau(X)$ , то  $w(X) \leq w(P_\tau(X))$ . То есть,  $w(P_\tau(X)) = w(X)$ . Теорема доказана.  $\square$

Из [4, II, §4] следует

**Теорема 1.17.** Функтор  $P_\tau$  сохраняет класс метризуемых пространств.

Напомним, что  $p$ -паракомпактами называются прообразы метризуемых пространств при совершенных отображениях [11]. Из теорем 1.3 и 1.7 следует

**Теорема 1.18.** Функтор  $P_\tau$  сохраняет класс  $p$ -паракомпактов.

Пусть  $X$  – топологическое пространство. Для каждого счетного ординала  $\alpha$  определим семейства  $\mathcal{F}_\alpha(X)$  и  $\mathcal{G}_\alpha(X)$  борелевских подмножеств следующим образом: семейство  $\mathcal{F}_0(X)$  (семейство  $\mathcal{G}_0(X)$ ) состоит из всех замкнутых (открытых) множеств пространства  $X$ , семейство  $\mathcal{F}_\alpha(X)$  (семейство  $\mathcal{G}_\alpha(X)$ ) состоит из всех счетных объединений (счетных пересечений) множеств из  $\bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{F}_\xi(X)$  (из  $\bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{G}_\xi(X)$ ) для нечетных ординалов  $\alpha$  и из всех счетных пересечений (счетных объединений) множеств из  $\bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{F}_\xi(X)$  (из  $\bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{G}_\xi(X)$ ) для четных ординалов. Очевидно, что для любого  $A \in \mathcal{F}_\xi(X)$  ( $A \in \mathcal{G}_\xi(X)$ ) выполняется  $X \setminus A \in \mathcal{G}_\xi(X)$  ( $X \setminus A \in \mathcal{F}_\xi(X)$ ).

Для топологического пространства  $X$  через  $\mathcal{B}_0(X)$  обозначается  $\sigma$ -алгебра всех бэровских подмножеств  $X$ , то есть наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая все функционально замкнутые подмножества  $X$ . Бэровские подмножества классифицируются следующим образом:

$\mathcal{M}_0(X)$  ( $\mathcal{A}_0(X)$ ) – класс всех функционально замкнутых (функционально открытых) подмножеств пространства  $X$ . Для каждого счетного ординала  $\alpha$ ,  $\mathcal{M}_\alpha(X)$  ( $\mathcal{A}_\alpha(X)$ ) – семейство подмножеств  $X$ , представляемых в виде счетных пересечений (объединений) множеств из  $\bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{A}_\xi(X)$  (из  $\bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{M}_\xi(X)$ ).

Для борелевского подмножества  $A$  тихоновского пространства  $X$  определим функцию  $\dot{\chi}_A : P_\tau(X) \rightarrow [0, 1]$  формулой  $\dot{\chi}_A(\mu) = \mu^*(A)$ .

**Лемма 1.19.** Пусть  $X$  – тихоновское пространство,  $A$  – подмножество  $X$ ,  $\alpha$  – четный ординал,  $\xi$  – ординал, и  $a \in \mathbb{R}$ . Тогда

1. если  $A \in \mathcal{M}_\xi(X)$ , то  $\dot{\chi}_A^{-1}([a, \infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(A) \geq a\} \in \mathcal{M}_\xi(P_\tau(X))$ ;
2. если  $A \in \mathcal{F}_\alpha(X)$ , то  $\dot{\chi}_A^{-1}([a, \infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(A) \geq a\} \in \mathcal{F}_\alpha(P_\tau(X))$ ;
3. если  $A \in \mathcal{A}_\xi(X)$ , то  $\dot{\chi}_A^{-1}((a, \infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(A) > a\} \in \mathcal{A}_\xi(P_\tau(X))$ ;
4. если  $A \in \mathcal{G}_\alpha(X)$ , то  $\dot{\chi}_A^{-1}((a, \infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(A) > a\} \in \mathcal{G}_\alpha(P_\tau(X))$ .

*Доказательство.* Докажем сначала утверждение (3) леммы. Пусть  $U$  – функционально открытое подмножество  $X$  и  $\tilde{U}$  – такое функционально открытое подмножество  $\beta X$ , что  $\tilde{U} \cap X = U$ . Несложно построить такую поточечно сходящуюся к характеристической функции  $\chi_{\tilde{U}} : \beta X \rightarrow [0, 1]$  последовательность  $\{f_n : \beta X \rightarrow [0, 1]\}_{n=1}^\infty$  непрерывных функций, что  $f_n|_{\beta X \setminus \tilde{U}} \equiv 0$ ,  $f_n^{-1}(\{1\}) \subset f_{n+1}^{-1}(\{1\})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $\bigcup_{n=1}^\infty f_n^{-1}(\{1\}) = \tilde{U}$ . Согласно лемме 1.1,  $\mu^*(U) = \mu(\tilde{U})$  для любой меры  $\mu \in P_\tau(X)$ . Следовательно,  $\dot{\chi}_U^{-1}((a, \infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(U) > a\} = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu(\tilde{U}) > a\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu(f_n) > a\}$  – функционально открытое в  $P_\tau(X)$  множество.

Если  $Z$  – функционально замкнутое подмножество  $X$ , тогда множество  $X \setminus Z$  – функционально открыто. Положив  $\tilde{U}$  – функционально открытое подмножество  $\beta X$  такое, что  $\tilde{U} \cap X = X \setminus Z$ , по только что доказанному получим, что множество  $\{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu(\tilde{U}) > 1 - a\}$  – функционально открыто в  $P_\tau(X)$ . Тогда  $\dot{\chi}_Z^{-1}([a, \infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(Z) \geq a\} = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu(\beta X \setminus \tilde{U}) \geq a\} = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu(\tilde{U}) \leq 1 - a\}$  – дополнение к функционально открытому множеству  $\{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu(\tilde{U}) > 1 - a\}$ , и, следовательно, является множеством функционально замкнутым в  $P_\tau(X)$ .

Покажем теперь, что для любого замкнутого множества  $F \subset X$ , множество  $\dot{\chi}_F^{-1}([a, \infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(F) \geq a\}$  – замкнуто в  $P_\tau(X)$ . Пусть  $\bar{F}$  – замыкание множества  $F$  в  $X$ . Тогда (см. [4]) множество  $\{\mu \in P_\tau(\beta X) \mid \mu(\bar{F}) \geq a\}$  – замкнуто в  $P(\beta X)$ . По лемме 1.1, для любой меры  $\mu \in P_\tau(X)$   $\mu^*(F) = \mu(\bar{F})$ . Следовательно, множество  $P_\tau(X) \cap \{\mu \in P(\beta X) \mid \mu(\bar{F}) \geq a\} = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(F) \geq a\} = \dot{\chi}_F^{-1}([a, \infty))$  замкнуто в  $P_\tau(X)$ . Переходя к дополнениям, доказываем, что для любого открытого множества  $G$  в  $X$  множество  $\dot{\chi}_G^{-1}((a, \infty)) = \{\mu \in P_\tau(X) \mid \mu^*(G) > a\}$  – открыто в  $P_\tau(X)$ .

Таким образом, для  $\xi = \alpha = 0$ , лемма доказана.

Теперь допустим, что  $\xi$  – ординал. Предположим, что для каждого  $a \in \mathbb{R}$  и  $A \in \mathcal{M}_{\xi'}(X)$ , где  $\xi' < \xi$ , доказано, что  $\dot{\chi}_A^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{M}_{\xi'}(P_\tau(X))$ . Пусть  $A \in \mathcal{M}_\xi(X)$ . Тогда  $A = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=1}^\infty A_n^m$ , где  $A_n^m \in \bigcup_{\xi' < \xi} \mathcal{M}_{\xi'}(X)$ . Без ограничения общности, для каждого

$n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n^1 \subset A_n^2 \subset \dots$  и  $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_1^m \supset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_2^m \supset \dots$ . Легко видеть, что  $\dot{\chi}_A^{-1}([a, \infty)) = \{\mu \in P_{\tau}(X) \mid \mu^*(A) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\mu \in P_{\tau}(X) \mid \mu^*(A_n^m) \geq a - \frac{1}{n}\}$ . По предположению трансфинитной индукции, для каждого  $n, m \in \mathbb{N}$   $\{\mu \in P_{\tau}(X) \mid \mu^*(A_n^m) \geq a - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{M}_{\xi'}(P_{\tau}(X))$ , где  $\xi' < \xi$ . Следовательно,  $\dot{\chi}_A^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{M}_{\xi}(P_{\tau}(X))$ .

Аналогичными рассуждениями доказываем, что для любого четного ординала  $\alpha$ ,  $\dot{\chi}_A^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{F}_{\alpha}(P_{\tau}(X))$ , если только  $A \in \mathcal{F}_{\alpha}(X)$ .

Если  $A \in \mathcal{A}_{\xi}(X)$ , то  $P_{\tau}(X) \setminus \dot{\chi}_A^{-1}([a, \infty)) = \{\mu \in P_{\tau}(X) \mid \mu^*(A) \notin (a, \infty)\} = \{\mu \in P_{\tau}(X) \mid \mu^*(A) \leq a\} = \{\mu \in P_{\tau}(X) \mid \mu^*(X \setminus A) \geq 1 - a\} = \dot{\chi}_{X \setminus A}^{-1}([1 - a, \infty))$ . Поскольку  $A \in \mathcal{A}_{\xi}(X)$ , то  $X \setminus A \in \mathcal{M}_{\xi}(X)$ , и, следовательно,  $\dot{\chi}_{X \setminus A}^{-1}([1 - a, \infty)) \in \mathcal{M}_{\xi}(P_{\tau}(X))$  и  $\dot{\chi}_A^{-1}([a, \infty)) = P_{\tau}(X) \setminus \dot{\chi}_{X \setminus A}^{-1}([1 - a, \infty)) \in \mathcal{A}_{\xi}(X)$ .

Аналогично показываем, что для любого четного ординала  $\alpha$ , если  $A \in \mathcal{G}_{\alpha}(X)$ , то  $\dot{\chi}_A^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{G}_{\alpha}(P_{\tau}(X))$ . Лемма доказана.  $\square$

**Следствие 1.20.** *Функтор  $P_{\tau}$  сохраняет полные по Чеху пространства.*

*Доказательство.* Пусть тихоновское пространство  $X$  полно по Чеху. Тогда  $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$  –  $G_{\delta}$ -множество в  $\beta X$  (здесь  $U_n \subset \beta X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , – открытые в  $\beta X$  множества). Тогда  $P_{\tau}(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid \mu(X) = 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\mu \in P(\beta X) \mid \mu(U_n) > 1 - \frac{1}{n}\}$ . По лемме 1.18, множества  $\{\mu \in P(\beta X) \mid \mu(U_n) > 1 - \frac{1}{n}\}$  – открытые в  $P(\beta X)$ , то есть,  $P_{\tau}(X)$  –  $G_{\delta}$ -множество в  $P(\beta X)$ . По [6, 3.9.1], пространство  $P_{\tau}(X)$  – полно по Чеху.  $\square$

**Следствие 1.21.** *Если  $A$  – бэровское подмножество тихоновского пространства  $X$ , то функция  $\dot{\chi}_A : P_{\tau}(X) \rightarrow [0, 1]$  является измеримой относительно  $\sigma$ -алгебры бэровских подмножеств  $P_{\tau}(X)$ .*

**Теорема 1.22.** *Функтор  $P_{\tau}$  сохраняет бэровские подмножества. Более того, для любого ординала  $\xi$ , если  $A \in \mathcal{M}_{\xi}(X)$ , то  $P_{\tau}(A) \in \mathcal{M}_{\xi}(P_{\tau}(X))$ ; для любого четного ординала  $\alpha$ , если  $A \in \mathcal{F}_{\alpha}(X)$ , то  $P_{\tau}(A) \in \mathcal{F}_{\alpha}(P_{\tau}(X))$ .*

Пусть  $X$  – метрический компакт. Через  $\mathcal{P}(X)$  мы обозначаем семейство проективных подмножеств  $X$ , т.е. наименьшее семейство, содержащее класс  $\mathcal{B}(X)$  всех борелевских подмножеств  $X$  и удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) Для любого непрерывного отображения  $f : A \rightarrow X$  множества  $A \in \mathcal{P}(X)$  образ  $f(A)$  принадлежит классу  $\mathcal{P}(X)$ ;
- (2) для любого множества  $A \in \mathcal{P}(X)$  его дополнение  $X \setminus A$  принадлежит классу  $\mathcal{P}(X)$ .

Семейство  $\mathcal{P}(X)$  допускает представление  $\mathcal{P}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(X)$ , где  $\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{B}(X)$  – семейство борелевских множеств  $X$ ; проективные множества класса  $\mathcal{P}_{2n+1}(X)$  суть непрерывные образы множеств класса  $\mathcal{P}_{2n}(X)$ ; проективные множества класса  $\mathcal{P}_{2n}(X)$  – это дополнения к проективным множествам класса  $\mathcal{P}_{2n-1}(X)$ . При этом, для любого  $n \geq 0$   $\mathcal{P}_{2n+1}(X) \subset \mathcal{P}_{2n+3}(X) \cap \mathcal{P}_{2n+4}(X)$  [12, §38]. Проективные множества классов  $\mathcal{P}_1(X)$  и  $\mathcal{P}_2(X)$  имеют специальные названия: их называют соответственно аналитическими и коаналитическими множествами.

**Теорема 1.23.** *Функтор  $P_\tau$  сохраняет проективные подмножества метрических компактов. Более того, для любого метрического компакта  $X$  и любого  $n \geq 1$ , если  $A \in \mathcal{P}_{2n-1}(X)$ , то  $P_\tau(A) \in \mathcal{P}_{2n+2}(P(X))$ .*

*Доказательство.* Пусть  $X$  – метрический компакт. Через  $\text{exp}(X)$  обозначается гиперпространство непустых замкнутых подмножеств  $X$ , наделенное топологией Виеториса [9]. Отметим, что для любого  $0 \leq a \leq 1$  множество  $R(a) = \{(\mu, K) \in P(X) \times \text{exp}(X) \mid \mu(K) \geq a\}$  замкнуто в  $P(X) \times \text{exp}(X)$ . Действительно, пусть  $(\mu, K) \in P(X) \times \text{exp}(X)$  – предельная точка множества  $R(a)$ . По определению,  $\mu(K) = \inf\{\mu(f) \mid f \in C(X), f \geq 0, f|_K \equiv 1\}$ . Пусть  $f : X \rightarrow [0, 1]$  – любая функция с  $f|_K \equiv 1$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  множество  $\langle f^{-1}(1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1] \rangle = \{B \in \text{exp}(X) \mid B \subset f^{-1}(1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1]\}$  открыто в  $\text{exp}(X)$ . Поскольку  $(\mu, K)$  – предельная точка множества  $R(a)$ , то существует такая пара  $(\eta, C) \in R(a)$ , что  $|\eta(f) - \mu(f)| < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $C \subset f^{-1}(1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1]$ . Тогда  $\mu(f) > \eta(f) - \frac{\varepsilon}{2} = \int_X f d\eta - \frac{\varepsilon}{2} \geq \int_C f d\eta - \frac{\varepsilon}{2} > (1 - \frac{\varepsilon}{2})\eta(C) - \frac{\varepsilon}{2} \geq (1 - \frac{\varepsilon}{2})a - \frac{\varepsilon}{2} \geq a - \varepsilon$ . Из произвольности  $\varepsilon > 0$  следует, что  $\mu(f) \geq a$ , откуда получаем, что  $\mu(K) \geq a$  и  $(\mu, K) \in R(a)$ .

Теперь пусть  $n \geq 1$  и  $A \in \mathcal{P}_{2n-1}(X)$ . Тогда  $P(X) \setminus P_\tau(A) = \{\mu \in P(X) \mid \mu^*(A) < 1\} = \{\mu \in P(X) \mid \mu_*(X \setminus A) > 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\mu \in P(X) \mid \text{существует компакт } K \subset X \setminus A \text{ с } \mu(K) \geq \frac{1}{m}\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \text{pr}_1(G_m)$ , где  $G_m = \{(\mu, K) \in P(X) \times \text{exp}(X) \mid K \subset X \setminus A, \mu(K) \geq \frac{1}{m}\} = R(\frac{1}{m}) \cap (P(X) \times \text{exp}(X \setminus A))$ , а  $\text{pr}_1 : P(X) \times \text{exp}(X) \rightarrow P(X)$  – проекция на первый сомножитель. Поскольку  $A \in \mathcal{P}_{2n-1}(X)$ , то  $X \setminus A \in \mathcal{P}_{2n}(X)$ , и согласно [13],  $\text{exp}(X \setminus A) \in \mathcal{P}_{2n}(\text{exp}(X))$ . Следовательно,  $P(X) \setminus P_\tau(A) \in \mathcal{P}_{2n+1}(P(X))$  и  $P_\tau(A) \in \mathcal{P}_{2n+2}(P(X))$ . Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 1.24.** Из теоремы 1.22 следует, что для любого  $A \in \mathcal{P}_0(X)$   $P_\tau(A) \in \mathcal{P}_0(P(X))$ . Более того, из теоремы 2.32 вытекает, что для любого коаналитического множества  $A \subset X$   $P_\tau(A) \in \mathcal{P}_3(P(X))$ . Это следует из того, что коаналитические подмножества метрических компактов измеримы относительно любой меры и поэтому, для коаналитического множества  $A \subset X$  выполняется  $P_\tau(A) = \hat{P}(A)$ .

Напомним теперь введенное С. Эйленбергом и Дж. Муром [14]

**Определение 1.25.** Тройкой на категории  $\mathcal{C}$  называется тройка  $\mathbb{T} = (T, \delta, \psi)$ , состоящая из ковариантного функтора  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  и естественных преобразований  $\delta : Id \rightarrow T$  (единица) и  $\psi : T^2 \rightarrow T$  (умножение), для которых выполняются условия:

$$\psi \circ T\delta = \psi \circ \delta T = \text{id}_T \quad \text{и} \quad \psi \circ \psi T = \psi \circ T\psi.$$

Функтор  $T$ , который может быть включен в тройку  $\mathbb{T}$ , называется монадой на категории  $\mathcal{C}$ .

Хорошо известно [2], что функтор  $P$  является монадой на категории  $\text{Comp}$  компактов. В самом деле, он включается в тройку  $\mathbb{P} = (P, \delta, \psi)$ , где  $\delta$  – преобразование Дирака, а компонента  $\psi_X : P^2(X) \rightarrow P(X)$  умножения  $\psi$  определяется формулой  $\psi_X(M)(f) = M(F_f)$  для  $f \in C(X)$ ,  $M \in P^2(X)$ , где  $F_f : P(X) \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция, действующая посредством формулы  $F_f(\mu) = \mu(f)$ ,  $\mu \in P(X)$ .

Наша цель – показать, что функтор  $P_\tau : \mathcal{Tych} \rightarrow \mathcal{Tych}$  тоже включается в монаду. Для этого очевидно, достаточно доказать, что для любого тихоновского пространства  $X$   $\delta_{\beta X}(X) \subset P_\tau(X)$  и  $\psi_{\beta X}(P_\tau^2(X)) \subset P_\tau(X)$ , где  $\delta_{\beta X}$  и  $\psi_{\beta X}$  – компоненты естественных преобразований, входящих в тройку  $\mathbb{P} = (P, \delta, \psi)$  (здесь и далее символ  $P_\tau^2$  обозначает композицию функторов  $P_\tau \circ P_\tau$ ). Первое включение  $\delta_{\beta X}(X) \subset P_\tau(X)$  следует из теоремы 1.14. Для доказательства второго включения предположим, что  $M \in P_\tau^2(X) \subset P^2(\beta X)$ , т.е.  $M^*(P_\tau(X)) = 1$ . Пусть  $\{\varphi_\alpha\} \subset C(\beta X)$  – монотонно убывающая направленность непрерывных функций на  $\beta X$ , поточечно стремящаяся к нулю на множестве  $X \subset \beta X$ . Согласно [4],  $\psi_{\beta X}(M) \in P_\tau(X)$ , если мы покажем, что числовая направленность  $\{\psi_{\beta X}(M)(\varphi_\alpha)\}$  стремится к нулю. Отметим, что  $\{F_{\varphi_\alpha} : P(\beta X) \rightarrow \mathbb{R}\}$  – монотонно убывающая направленность непрерывных функций на  $P(\beta X)$ , поточечно стремящаяся к нулю на множестве  $P_\tau(X) \subset P(\beta X)$ . Поскольку  $M$  –  $\tau$ -гладкая мера на  $P_\tau(X)$ , то согласно [4],  $\{M(F_{\varphi_\alpha})\} \rightarrow 0$ . Но  $\psi_{\beta X}(M)(\varphi_\alpha) = M(F_{\varphi_\alpha})$  для каждого  $\alpha$ . Следовательно, направленность  $\{\psi_{\beta X}(M)(\varphi_\alpha)\}$  стремится к нулю, т.е.  $\psi_{\beta X}(P_\tau^2(X)) \subset P_\tau(X)$ . Положим  $\delta_X = \delta_{\beta X}|_X : X \rightarrow P_\tau(X)$  и  $\psi_X = \psi_{\beta X}|_{P_\tau^2(X)} : P_\tau^2(X) \rightarrow P_\tau(X)$ . Легко видеть, что  $\mathbb{P}_\tau = (P_\tau, \delta, \psi)$  – тройка на категории  $\mathcal{Tych}$ . Таким образом доказана

**Теорема 1.26.** *Функтор  $P_\tau : \mathcal{Tych} \rightarrow \mathcal{Tych}$  является монадой на категории  $\mathcal{Tych}$ , продолжающей монаду  $P : \mathcal{Cont} \rightarrow \mathcal{Cont}$ .*

**Лемма 1.27.** *Для любого тихоновского пространства  $X$  и его подмножества  $Y$  выполняется равенство  $\psi_X^{-1}(P_\tau(Y)) = P_\tau^2(Y)$ .*

*Доказательство.* Включение  $\psi_X(P_\tau^2(Y)) \subset P_\tau(Y)$  следует из монадичности функтора  $P_\tau$ . Докажем теперь обратное включение. Пусть  $M \in P^2(\beta X)$  – такая мера, что  $\psi_{\beta X}(M) \notin P_\tau(Y)$ . Тогда существует такой компакт  $K \subset \beta Y \setminus Y$ , что  $\psi_{\beta X}(M)(K) > 0$ . Рассмотрим семейство функций  $\Phi = \{f \in C(\beta X) \mid 0 \leq f \leq 1, f|_K \equiv 1\}$ , снабженное естественным частичным порядком  $\leq$ . Семейство  $\Phi$  направлено вниз, т.е. для любых функций  $f, g \in \Phi$   $\min(f, g) \in \Phi$ , и, рассматриваемое как направленность, поточечно стремится к нулю на множестве  $Y$ . Тогда направленность  $\{F_f : P(\beta X) \rightarrow \mathbb{R}\}_{f \in \Phi}$  монотонно убывает и стремится к нулю на множестве  $P_\tau(Y)$ . Если бы мера  $M$  принадлежала множеству  $P_\tau^2(Y)$  тогда бы направленность  $\{M(F_f)\}_{f \in \Phi}$  стремилась к нулю. Но  $M(F_f) = \psi_{\beta X}(M)(f) \geq \psi_{\beta X}(M)(K) > 0$ . Полученное противоречие показывает, что  $M \notin P_\tau^2(Y)$ . Таким образом,  $\psi_X^{-1}(P_\tau(Y)) = P_\tau^2(Y)$ .  $\square$

**Следствие 1.28.** *Для каждого тихоновского пространства  $X$  компонента  $\psi_X : P_\tau^2(X) \rightarrow P_\tau(X)$  умножения является открытым и совершенным отображением.*

*Доказательство* следует из леммы 1.27 и того факта, что  $\psi_{\beta X} : P^2(\beta X) \rightarrow P(\beta X)$  является открытым отображением компактов [2, 7.8], либо [15].

Напомним, что отображение  $p : X \rightarrow Y$  топологических пространств называется *мягким* для класса метрических пространств, если для любого метрического пространства  $A$ , его замкнутого множества  $B \subset A$  и отображений  $g : A \rightarrow Y$  и  $f : B \rightarrow X$  с  $p \circ g = g|_B$  существует такое отображение  $F : A \rightarrow X$ , что  $F|_B = f$  и  $p \circ F = g$ .

**Теорема 1.29.** *Для каждого метрического пространства  $X$  отображение  $\psi_X : P_\tau^2(X) \rightarrow P_\tau(X)$  является мягким для класса метрических пространств.*

Доказательство вытекает из следствия 1.28, метризуемости пространства  $P_\tau^2(X)$  (см. теорему 1.17), теоремы Майкла о селекции [16, §1.4 и упр.1.4.2] и того факта, что прообраз  $\psi_X^{-1}(\mu) \subset P_\tau^2(X)$  любой меры  $\mu \in P_\tau(X)$  является выпуклым компактом в  $P_\tau^2(X)$ .

Мы будем говорить, что отображение  $p : E \rightarrow B$  гомеоморфно тривиальному  $Q$ -расслоению, если существует такой гомеоморфизм  $f : E \rightarrow B \times Q$ , что  $\text{pr}_B \circ f = p$ , где  $\text{pr}_B : B \times Q \rightarrow B$  – естественная проекция. Напомним, что  $Q = [-1, 1]^\omega$  – гильбертов кирпич.

**Теорема 1.30.** *Для метрического сепарабельного пространства  $X \neq \{*\}$  отображение  $\psi_X|_{P_\tau^2(X) \setminus \delta^2(X)} : P_\tau^2(X) \setminus \delta^2(X) \rightarrow P_\tau(X) \setminus \delta(X)$  гомеоморфно тривиальному  $Q$ -расслоению.*

*Доказательство.* Пусть  $cX$  – метрическая компактификация пространства  $X \neq \{*\}$ . В [15] доказано, что отображение  $\psi_X|_{P^2(cX) \setminus \delta^2(cX)} : P^2(cX) \setminus \delta^2(cX) \rightarrow P(cX) \setminus \delta(cX)$  является тривиальным  $Q$ -расслоением. Теперь теорема следует из леммы 1.27.  $\square$

## 2 КАТЕГОРНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКТОРА $\hat{P}$

В этом параграфе мы исследуем категорные свойства функтора  $\hat{P} : \mathcal{Tych} \rightarrow \mathcal{Tych}$  вероятностных радоновских мер.

Как уже упоминалось во введении, существует два эквивалентных подхода к описанию пространства  $\hat{P}(X)$ , где  $X$  – тихоновское пространство. Первый – через вложения в компактные пространства:  $\hat{P}(X) = \{\mu \in P(\beta X) \mid \mu_*(X) = 1\} \subset P(\beta X)$ . При втором подходе  $\hat{P}(X)$  определяется как пространство всех вероятностных радоновских мер на пространстве  $X$ . В дальнейшем, в зависимости от ситуации, без специальных оговорок, мы будем использовать тот, либо другой подход к описанию пространства  $\hat{P}(X)$ .

**Теорема 2.1.** *Функтор  $\hat{P}$  сохраняет класс инъективных отображений.*

*Доказательство.* Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – инъективное отображение и  $\mu_1, \mu_2 \in \hat{P}(X)$ ,  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Тогда  $\mu_1(A) \neq \mu_2(A)$  для некоторого борелевского множества  $A \subset X$ . Поскольку меры  $\mu_1, \mu_2$  – радоновские, то существует такой компакт  $K \subset A$ , что  $\mu_1(K) \neq \mu_2(K)$ . Тогда  $f(K)$  – компакт в  $Y$  и  $\hat{P}(f)(\mu_1)(f(K)) = \mu_1(f^{-1}(f(K))) = \mu_1(K) \neq \mu_2(K) = \hat{P}(f)(\mu_2)(f(K))$ , т.е.  $\hat{P}(f)(\mu_1) \neq \hat{P}(f)(\mu_2)$ . Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 2.2.** *Функтор  $\hat{P}$  сохраняет класс совершенных отображений.*

*Доказательство.* Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – совершенное отображение тихоновских пространств. Тогда продолжение  $\beta f : \beta X \rightarrow \beta Y$  отображения  $f$  обладает следующим свойством:  $\beta f(\beta X \setminus X) \subset \beta Y \setminus Y$  [6, 3.7.15]. Покажем, что  $P(\beta f)(P(\beta X) \setminus \hat{P}(X)) \subset P(\beta Y) \setminus \hat{P}(Y)$ . Пусть  $\mu \in P(\beta X)$  и  $P(\beta f)(\mu) \in \hat{P}(Y)$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует

такой компакт  $K \subset Y \subset \beta Y$ , что  $P(\beta f)(\mu)(K) > 1 - \varepsilon$ . Поскольку  $f$  – собственное отображение, то  $(\beta f)^{-1}(K) = f^{-1}(K)$  – компакт в  $X$  (см. [6, 3.7.2]). Тогда  $P(\beta f)(\mu)(K) = \mu((\beta f)^{-1}(K)) = \mu(f^{-1}(K)) > 1 - \varepsilon$ . Следовательно,  $\mu \in \hat{P}(X)$  и  $P(\beta f)(P(\beta X) \setminus \hat{P}(X)) \subset P(\beta Y) \setminus \hat{P}(Y)$ . Поскольку  $P(\beta f) : P(\beta X) \rightarrow P(\beta Y)$  – отображение компактов, то из последнего включения следует, что отображение  $\hat{P}(f) = P(\beta f)|_{\hat{P}_\beta(X)} : \hat{P}(X) \rightarrow \hat{P}(Y)$  – совершенно. Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 2.3.** *Функтор  $\hat{P}$  сохраняет класс замкнутых вложений.*

Поскольку  $\hat{P}$  – подфунктор функтора  $P_\tau$ , то из теоремы 1.4 следует

**Теорема 2.4.** *Функтор  $\hat{P}$  сохраняет класс вложений.*

Таким образом, функтор  $\hat{P}$  сохраняет класс инъективных отображений и класс (замкнутых) вложений. С сюръективными отображениями дело обстоит не так гладко.

Мы говорим, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  обладает борелевской селекцией, если существует такое (не обязательно непрерывное) отображение  $s : Y \rightarrow X$ , что  $f \circ s = \text{id}_Y$ , и для любого открытого множества  $U \subset X$   $s^{-1}(U)$  – борелевское подмножество пространства  $Y$ .

Отображение  $f : X \rightarrow Y$  обладает локальными борелевскими селекциями, если для любого открытого множества  $U \subset X$  существует такая борелевская селекция  $s : Y \rightarrow X$  отображения  $f$ , что  $s(f(U)) \subset U$ .

**Пример 2.5.** Пусть  $p : \mathfrak{c} \rightarrow [0, 1]$  – биективное отображение дискретного пространства  $\mathfrak{c}$  на отрезок. Тогда отображение  $\hat{P}(p) : \hat{P}(\mathfrak{c}) \rightarrow \hat{P}([0, 1])$  не сюръективно (мера Лебера на  $[0, 1]$  не имеет прообраза).

Вместе в тем справедливо

**Предложение 2.6.** *Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – отображение сепарабельных метрических пространств, обладающее борелевской селекцией. Тогда отображение  $\hat{P}(f) : \hat{P}(X) \rightarrow \hat{P}(Y)$  – сюръективно.*

*Доказательство.* Пусть  $s : Y \rightarrow X$  – борелевская селекция отображения  $f$ . Для каждой меры  $\mu \in \hat{P}(Y)$  положим  $\eta$  – вероятностная счетно-аддитивная мера на  $X$ , определенная условием  $\eta(A) = \mu(f(A \cap s(Y)))$  для каждого борелевского множества  $A \subset X$ .

Покажем, что мера  $\eta$  – радоновская. Для этого достаточно показать, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует компакт  $K \subset X$  с  $\eta(K) > 1 - \varepsilon$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Поскольку отображение  $s : Y \rightarrow X$  – борелевски измеримо, по теореме Лузина [7, 2.3.5], существует замкнутое подмножество  $C \subset Y$  такое, что  $\mu(C) > 1 - \varepsilon/2$  и отображение  $s|_C : C \rightarrow X$  – непрерывно. Поскольку мера  $\mu$  на  $Y$  – радоновская, то существует такой компакт  $K \subset C$ , что  $\mu(C \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $s(K) \subset X$  – компакт. Более того,  $\eta(s(K)) = \mu(f(s(K) \cap s(Y))) = \mu(f(s(K))) = \mu(K) > 1 - \varepsilon$ . Таким образом, мера  $\eta$  на  $X$  – радоновская и  $\hat{P}(f)(\eta) = \mu$ . Теорема доказана.  $\square$



**Следствие 2.7.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – биективное непрерывное отображение сепарабельного борелевского пространства  $X$  на метрическое пространство  $Y$ . Тогда отображение  $\hat{P}(f) : \hat{P}(X) \rightarrow \hat{P}(Y)$  – биективно.

*Доказательство.* Инъективность отображения  $\hat{P}(f)$  следует из теоремы 2.1. Сюръективность  $\hat{P}(f)$  следует из предложения 2.6, поскольку отображение  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  – борелевски измеримо [12, §39, IV].  $\square$

Условие существования борелевской селекции в предложении 2.6 существенно. Действительно, рассмотрим

**Пример 2.8.** Пусть  $Z \subset [0, 1]$  – подмножество отрезка с внутренней мерой Лебега  $\lambda_*(Z) = 0$  и внешней мерой  $\lambda^*(Z) = 1$ . Пусть  $X = Z \times \{0\} \cup ([0, 1] \setminus Z) \times \{1\}$  и  $f : X \rightarrow [0, 1]$  – проекция на первый сомножитель. Тогда мера Лебега  $\lambda$  на  $[0, 1]$  не имеет прообраза при отображении  $\hat{P}(f) : \hat{P}(X) \rightarrow P([0, 1])$ .

Вместе с тем, функтор  $\hat{P}$  сохраняет одно свойство отображений, из которого, в компактном случае, вытекает сюръективность.

**Предложение 2.9.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – отображение, для которого образ  $f(X)$  всюду плотен в  $Y$ . Тогда образ  $\hat{P}(f)(\hat{P}(X))$  всюду плотен в  $\hat{P}(Y)$ .

*Доказательство* аналогично доказательству предложения 1.6.

**Предложение 2.10.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – открытое отображение сепарабельных метрических пространств, обладающее локальными борелевскими селекциями. Тогда отображение  $\hat{P}(f) : \hat{P}(X) \rightarrow \hat{P}(Y)$  – сюръективно и открыто.

*Доказательство.* По предложению 2.6, отображение  $\hat{P}(f)$  – сюръективно. Покажем, что оно открыто. Согласно [4, II, §1] система множеств  $\mathcal{N}^*(\mu_0, U_1, \dots, U_n, \varepsilon) = \{\mu \in \hat{P}(X) \mid \mu(U_i) - \mu_0(U_i) > -\varepsilon, 1 \leq i \leq n\}$ , где  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu_0 \in \hat{P}(X)$  и  $U_1, \dots, U_n$  – открытые множества в  $X$ , образует базу топологии на  $\hat{P}(X)$ . Зафиксируем базисное множество  $\mathcal{N}^*(\mu_0, U_1, \dots, U_n, \varepsilon)$  и покажем, что его образ  $\hat{P}(f)(\mathcal{N}^*(\mu_0, U_1, \dots, U_n, \varepsilon))$  является окрестностью меры  $\eta_0 = \hat{P}(f)(\mu_0) \in \hat{P}(Y)$ . Для этого мы найдем сначала такую базисную окрестность  $\mathcal{N}^*(\mu_0, V_1, \dots, V_m, \varepsilon') \subset \mathcal{N}^*(\mu_0, U_1, \dots, U_n, \varepsilon)$ , что  $V_i, 1 \leq i \leq m$ , – открытые попарно непересекающиеся подмножества  $X$ .

Обозначим через  $\mathbf{n}$   $n$ -элементное множество  $\{1, \dots, n\}$ . На множестве  $\text{exp}(\mathbf{n})$  всех непустых подмножеств  $\mathbf{n}$  введём такое линейное упорядочение, что для любых  $A, B \subset \mathbf{n}$ , если  $A \supset B$ , то  $A \leq B$  (см. [17, §2.4, Теорема 4]). Отметим, что  $|\text{exp}(\mathbf{n})| < 2^n$ . Положим  $\varepsilon' = \varepsilon/2^{n+1}$ . Для каждого  $A \subset \mathbf{n}$  положим  $U_A = \bigcap_{i \in A} U_i$ . Индуктивно, для каждого  $A \subset \mathbf{n}$  найдем такое открытое множество  $V_A \subset X$ , что  $\bar{V}_A \subset U_A \setminus \bigcup_{B < A} \bar{V}_B$  и  $\mu_0(V_A) > \mu_0(U_A \setminus \bigcup_{B < A} \bar{V}_B) - \varepsilon'$ . Легко видеть, что для любого  $A \subset \mathbf{n}$   $\mu_0(\bar{V}_A \setminus V_A) < \varepsilon'$  и, следовательно,  $\mu_0(U_A) < \mu_0(V_A) + \sum_{B < A} \mu_0(\bar{V}_B) + \varepsilon' < \sum_{B < A} \mu_0(V_B) + 2^n \varepsilon'$ . Кроме того, очевидно, что для  $A \neq B$   $\bar{V}_A \cap \bar{V}_B = \emptyset$ . Мы утверждаем, что  $\mathcal{N}^*(\mu_0, \{V_A : A \subset \mathbf{n}\}, \varepsilon') \subset \mathcal{N}^*(\mu_0, U_1, \dots, U_n, \varepsilon)$ . Действительно, если  $\mu \in \mathcal{N}^*(\mu_0, \{V_A : A \subset \mathbf{n}\}, \varepsilon')$ , то

$\mu(U_i) = \sum_{A \ni i} \mu(\bar{V}_A) + \mu(U_i \setminus \bigcup_{A \ni i} \bar{V}_A) \geq \sum_{A \ni i} \mu(\bar{V}_A) > \sum_{A \ni i} (\mu_0(V_A) - \varepsilon') > \sum_{A \ni i} \mu_0(V_A) - 2^n \varepsilon' > \mu_0(U_i) - 2^{n+1} \varepsilon' = \mu_0(U_i) - \varepsilon$ ,  $1 \leq i \leq n$ . То есть,  $\mu \in \mathcal{N}^*(\mu_0, U_1, \dots, U_n, \varepsilon)$ .

Запишем множество  $\mathcal{N}^*(\mu_0, \{V_A : A \subset \mathbf{n}\}, \varepsilon')$  в виде  $\mathcal{N}^*(\mu_0, V_1, \dots, V_m, \varepsilon')$ , где  $m = |\text{exp}(\mathbf{n})|$ . Через  $\mathbf{m}$  обозначим  $m$ -элементное множество  $\{1, \dots, m\}$ . Введем на множестве  $\text{exp}(\mathbf{m})$  такое линейное упорядочение, что для любых  $A, B \subset \mathbf{m}$ , если  $A \supset B$ , то  $A \leq B$ . Для каждого  $A \subset \mathbf{m}$  положим  $W'_A = \bigcap_{i \in A} f(V_i)$ . Поскольку  $f$  – открытое отображение, то множества  $W'_A \subset Y$  – открыты. Положим  $\delta = \varepsilon' / 2^{m+1}$ . Индуктивно, для каждого  $A \subset \mathbf{m}$  найдем такое открытое множество  $W_A \subset Y$ , что  $\bar{W}_A \subset W'_A \setminus \bigcup_{B < A} \bar{W}_B$  и  $\eta_0(W_A) > \eta_0(W'_A \setminus \bigcup_{B < A} \bar{W}_B) - \delta$ . Легко видеть, что для любых различных  $A, B \subset \mathbf{m}$  множества  $\bar{W}_A$  и  $\bar{W}_B$  не пересекаются. Более того, для любого  $A \subset \mathbf{m}$ ,  $\eta_0((W'_A \setminus \bigcup_{B < A} W'_B) \setminus W_A) < \delta$ . Мы утверждаем, что  $\mathcal{N}^*(\eta_0, \{W_A : A \subset \mathbf{m}\}, \delta) \subset \hat{P}(f)\mathcal{N}^*(\mu_0, V_1, \dots, V_m, \varepsilon')$ . Действительно, пусть  $\eta \in \mathcal{N}^*(\eta_0, \{W_A : A \subset \mathbf{m}\}, \delta)$ . Для каждого  $A \subset \mathbf{m}$  и каждого  $i \in A$  зафиксируем такую борелевскую селекцию  $s_{A,i} : Y \rightarrow X$  отображения  $f$ , что  $s_{A,i}(W_A) \subset V_i$ . Пусть  $\alpha_i^A$ ,  $i \in A$ , – такие неотрицательные числа, что для любого  $A \subset \mathbf{m}$   $\sum_{i \in A} \alpha_i^A = 1$  и  $\alpha_i^A \eta_0(W_A) \geq \mu_0(f^{-1}(W_A) \cap V_i)$ . Зафиксируем любую борелевскую селекцию  $s_0 : Y \rightarrow X$  отображения  $f$ . Пусть  $\mu$  – такая мера на  $X$ , что для каждого борелевского множества  $C \subset X$

$$\mu(C) = \eta(f(s_0(Y \setminus \bigcup_{A \subset \mathbf{m}} W_A)) \cap C) + \sum_{A \subset \mathbf{m}} \sum_{i \in A} \alpha_i^A \eta(f(s_{A,i}(W_A) \cap C)).$$

Аналогично как в доказательстве предложения 2.6, можно показать, что  $\mu$  – радоновская вероятностная мера на  $X$ , т.е.  $\mu \in \hat{P}(X)$ , и  $\hat{P}(f)(\mu) = \eta$ . Покажем, что  $\mu \in \mathcal{N}^*(\mu_0, V_1, \dots, V_m, \varepsilon')$ . Действительно,  $\mu(V_i) \geq \sum_{A \ni i} \alpha_i^A \eta(f(s_{A,i}(W_A) \cap V_i)) = \sum_{A \ni i} \alpha_i^A \eta(W_A) > \sum_{A \ni i} \alpha_i^A (\eta_0(W_A) - \delta) > \sum_{A \ni i} \alpha_i^A \eta_0(W_A) - 2^m \delta \geq \sum_{A \ni i} \mu_0(f^{-1}(W_A) \cap V_i) - 2^m \delta = \mu_0(f^{-1}(\bigcup_{A \ni i} W_A) \cap V_i) - 2^m \delta = \mu_0(f^{-1}(\bigcup_{A \ni i} W'_A) \cap V_i) - \mu_0(f^{-1}(\bigcup_{A \ni i} W'_A \setminus \bigcup_{A \ni i} W_A)) - 2^m \delta = \mu_0(V_i) - 2^m \delta - \eta_0(\bigcup_{A \ni i} W'_A \setminus \bigcup_{A \ni i} W_A)$ . Осталось оценить значение  $\eta_0(\bigcup_{A \ni i} W'_A \setminus \bigcup_{A \ni i} W_A)$ . По определению множеств  $W'_A$ ,  $\bigcup_{A \ni i} W'_A = W'_i$ . Тогда  $\eta_0(\bigcup_{A \ni i} W'_A \setminus \bigcup_{A \ni i} W_A) = \eta_0(W'_i \setminus \bigcup_{A \ni i} W_A) = \eta_0(\bigcup_{A \ni i} (W'_A \setminus \bigcup_{B < A} W'_B) \setminus \bigcup_{A \ni i} W_A) \leq \sum_{A \ni i} \eta_0((W'_A \setminus \bigcup_{B < A} W'_B) \setminus W_A) < 2^m \delta$ . Окончательно, получаем, что  $\mu(V_i) > \mu_0(V_i) - 2^{m+1} \delta = \mu_0(V_i) - \varepsilon'$ .  $\square$

**Предложение 2.11.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – отображение тихоновских пространств. Если  $\hat{P}(f) : \hat{P}(X) \rightarrow \hat{P}(Y)$  – открытое отображение, то отображение  $f$  – также открыто.

*Доказательство* буквально повторяет доказательство предложения 4.1 [18].

**Замечание 2.12.** В предположении континуум-гипотезы ( $\aleph_1 = \mathfrak{c}$ ), условие сепарабельности в предложениях 2.6, 2.10 может быть опущено. Это следует из [12, §31, X,8] и того, что носитель любой радоновской меры на метрическом пространстве – сепарабелен.

**Вопрос 2.13.** <sup>1</sup> Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – открытое сюръективное отображение сепарабельных борелевских пространств. Будет ли отображение  $\hat{P}(f)$  открытым?

Положительный ответ на этот вопрос дан в статье

[Богачев В.И., Колесников А.В., Открытые отображения вероятностных мер и теорема представления Скорохода // Теория вероятностей и ее применения. **46:1** (2001), 3-27].

В [8, §3] будет дан положительный ответ на этот вопрос в случае, когда пространство  $X$  метризуемо полной метрикой.

Пусть  $A$  – подмножество тихоновского пространства  $X$ . Поскольку функтор  $\hat{P}$  сохраняет вложения, мы будем отождествлять пространство  $\hat{P}(A)$  с подмножеством пространства  $\hat{P}(X)$ .

**Теорема 2.14.** *Функтор  $\hat{P}$  сохраняет прообразы, т.е. для любого отображения  $f : X \rightarrow Y$  тихоновских пространств и любого подмножества  $A \subset Y$*   
 $\hat{P}(f)^{-1}(\hat{P}(A)) = \hat{P}(f^{-1}(A)).$

*Доказательство.* Включение  $\hat{P}(f^{-1}(A)) \subset \hat{P}(f)^{-1}(\hat{P}(A))$  тривиально. Покажем, что  $\hat{P}(f)^{-1}(\hat{P}(A)) \subset \hat{P}(f^{-1}(A))$ . Пусть  $\mu \in \hat{P}(X)$  – мера, удовлетворяющая условию  $\hat{P}(f)(\mu) \in \hat{P}(A)$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Поскольку  $\hat{P}(f)(\mu) \in \hat{P}(A)$ , то существует компакт  $K \subset A$  с  $\hat{P}(f)(\mu)(K) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ . Множество  $f^{-1}(K) \subset X$  – замкнуто, причем  $\mu(f^{-1}(K)) = \hat{P}(f)(\mu)(K) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ . Поскольку мера  $\mu$  – радоновская, то существует такой компакт  $C \subset f^{-1}(K)$ , что  $\mu(f^{-1}(K) \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Следовательно,  $C \subset f^{-1}(A)$  и  $\mu(C) > 1 - \varepsilon$ , т.е.  $\mu \in \hat{P}(f^{-1}(A))$ . Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 2.15.** *Функтор  $\hat{P}$  сохраняет счетные пересечения, т.е. для любого тихоновского пространства  $X$  и его подмножеств  $X_n \subset X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\hat{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{P}(X_n)$ .*

*Доказательство.* Включение  $\hat{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{P}(X_n)$  очевидно. Теперь пусть  $\mu \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{P}(X_n)$ . Покажем, что  $\mu \in \hat{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n)$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Поскольку  $\mu \in \hat{P}(X_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то для каждого  $n \in \mathbb{N}$  существует такой компакт  $K_n \subset X_n$ , что  $\mu(K_n) > 1 - \varepsilon/2^n$ . Положим  $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ . Нетрудно убедиться, что  $K \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$  и  $\mu(K) > 1 - \varepsilon$ , т.е.  $\mu \in \hat{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n)$ . Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 2.16.** Теорема 2.15 не верна для произвольного числа индексов. Действительно, пусть  $X = [0, 1]$  и  $X_\alpha = [0, 1] \setminus \{\alpha\}$ , где  $\alpha \in [0, 1]$ . Тогда для каждого  $\alpha \in [0, 1]$  мера Лебега  $\lambda$  принадлежит множеству  $\hat{P}(X_\alpha)$ . Но,  $\bigcap_{\alpha \in [0, 1]} X_\alpha = \emptyset$ . То есть  $\hat{P}(\bigcap_{\alpha \in [0, 1]} X_\alpha) \neq \bigcap_{\alpha \in [0, 1]} \hat{P}(X_\alpha)$ .

**Лемма 2.17.** *Пусть  $X$  – тихоновское пространство и  $B \subset X$  – его борелевское подмножество. Тогда  $\hat{P}(B) = P_\tau(B) \cap \hat{P}(X) \subset P(\beta X)$ .*

*Доказательство.* Включение  $\hat{P}(B) \subset P_\tau(B) \cap \hat{P}(X)$  очевидно. Пусть  $\mu \in P_\tau(B) \cap \hat{P}(X)$ . Тогда  $\mu^*(B) = 1$  и  $\mu_*(X) = 1$ . Пусть  $\tilde{B} \subset \beta X$  – любое борелевское множество такое, что  $\tilde{B} \cap X = B$ . Тогда  $\mu(\tilde{B}) \geq \mu^*(B) = 1$ . Поскольку мера  $\mu$  – регулярна, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой компакт  $K_1 \subset \tilde{B}$ , что  $\mu(\tilde{B} \setminus K_1) < \varepsilon/2$ . По определению, из  $\mu_*(X) = 1$  следует, что существует компакт  $K_2 \subset X \subset \beta X$  такой, что  $\mu(K_2) > 1 - \varepsilon/2$ . Тогда  $K = K_1 \cap K_2 \subset \tilde{B} \cap X = B$  – такой компакт в  $B$ , что  $\mu(\beta X \setminus K) \leq \mu(\beta X \setminus K_1) + \mu(\beta X \setminus K_2) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ , откуда, по произвольности  $\varepsilon > 0$  следует  $\mu_*(B) = 1$  и  $\mu \in \hat{P}(B)$ . Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 2.18.** *Функтор  $\hat{P}$  сохраняет пересечения замкнутых подмножеств, т.е. для любого тихоновского пространства  $X$  и его замкнутых подмножеств  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ ,  $\hat{P}(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} \hat{P}(X_\alpha)$ .*

*Доказательство.* Из теоремы 1.10 следует, что  $P_\tau(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} P_\tau(X_\alpha)$ . Тогда, по лемме 2.17,  $\hat{P}(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = P_\tau(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) \cap \hat{P}(X) = \bigcap_{\alpha \in A} P_\tau(X_\alpha) \cap \hat{P}(X) = \bigcap_{\alpha \in A} \hat{P}(X_\alpha)$ . Теорема доказана.  $\square$

Теперь рассмотрим вопрос непрерывности функтора  $\hat{P}$ . Пусть  $A$  – направленное частично упорядоченное множество (направленность означает, что для любых  $\alpha, \beta \in A$  существует такое  $\gamma \in A$ , что  $\gamma \geq \alpha$  и  $\gamma \geq \beta$ ).

Пусть  $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$  – обратный спектр, индексированный множеством  $A$  и состоящий из тихоновских пространств. Через  $\varprojlim X_\alpha$  мы обозначаем предел этого спектра, а через  $p_\alpha : \varprojlim X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , – предельные проекции.

Обратный спектр  $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$  порождает обратный спектр  $\{\hat{P}(X_\alpha), \hat{P}(p_\alpha^\beta)\}$ , предел которого мы обозначаем через  $\varprojlim \hat{P}(X_\alpha)$ , а предельные проекции через  $\text{pr}_\alpha : \varprojlim \hat{P}(X_\alpha) \rightarrow \hat{P}(X_\alpha)$ . Отображения  $\hat{P}(p_\alpha) : \hat{P}(\varprojlim X_\alpha) \rightarrow \hat{P}(X_\alpha)$  порождают отображение  $R : \hat{P}(\varprojlim X_\alpha) \rightarrow \varprojlim \hat{P}(X_\alpha)$ .

Хорошо известно, что если все  $X_\alpha$  компактны, тогда отображение  $R$  – гомеоморфизм. Это следует из непрерывности функтора  $P$  в категории компактов [9, VII.3.11].

**Теорема 2.19.** *Отображение  $R : \hat{P}(\varprojlim X_\alpha) \rightarrow \varprojlim \hat{P}(X_\alpha)$  является вложением. Если предельные проекции  $p_\alpha : \varprojlim X_\alpha \rightarrow X_\alpha$  – плотны, тогда образ  $R(\hat{P}(\varprojlim X_\alpha))$  всюду плотен в  $\varprojlim \hat{P}(X_\alpha)$ . Если индексное множество  $A$  – счетно, тогда  $R$  – гомеоморфизм.*

*Доказательство.* Первые два утверждения доказываются аналогично соответствующим утверждениям теоремы 1.11.

Предположим, что множество  $A$  счетно и покажем, что отображение  $R : \hat{P}(\varprojlim X_\alpha) \rightarrow \varprojlim \hat{P}(X_\alpha)$  – гомеоморфизм. Для этого достаточно доказать сюръективность отображения  $R$ . Как и в доказательстве 1.11, вложим отображение  $R$  в гомеоморфизм  $\bar{R} : P(\varprojlim \beta X_\alpha) \rightarrow \varprojlim P(\beta X_\alpha)$ .

Зафиксируем нить  $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \varprojlim \hat{P}(\beta X_\alpha)$  и покажем, что  $\mu = \bar{R}^{-1}(\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}) \in \hat{P}(\varprojlim X_\alpha) \subset \hat{P}(\varprojlim \beta X_\alpha)$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Зафиксируем биекцию  $\xi : A \rightarrow \mathbb{N}$ . Для каждого  $\alpha \in A$  выберем такой компакт  $K_\alpha \subset X_\alpha$ , что  $\mu_\alpha(K_\alpha) > 1 - \varepsilon \cdot 2^{-\xi(\alpha)}$ . Очевидно, что множество  $K = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \varprojlim X_\alpha \mid p_\alpha(x_\alpha) \in K_\alpha, \alpha \in A\}$  – компактно. Более того,  $\mu(\varprojlim X_\alpha \setminus K) \leq \bigcup_{\alpha \in A} \mu(p_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus K_\alpha)) = \bigcup_{\alpha \in A} \mu_\alpha(X_\alpha \setminus K_\alpha) \leq \sum_{\alpha \in A} \varepsilon \cdot 2^{-\xi(\alpha)} = \varepsilon$ . Следовательно, отображение  $R$  сюръективно и теорема доказана.  $\square$

Из следствия 1.13 вытекает

**Предложение 2.20.** *Функтор  $\hat{P}$  сохраняет гомотопии, т.е. для любой гомотопии  $H_t : X \rightarrow Y$  гомотопия  $\hat{P}(H_t) : \hat{P}(X) \rightarrow \hat{P}(Y)$  непрерывна как отображение  $\hat{P}(H_{(\cdot)}) : \hat{P}(X) \times [0, 1] \rightarrow \hat{P}(Y)$ .*

Сейчас мы рассмотрим операцию тензорного произведения вероятностных радоновских мер. Хорошо известно (см. [9, VIII, §1]), что если задано семейство  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  компактов, тогда для любых вероятностных мер  $\mu_\alpha \in P(X_\alpha)$ ,  $\alpha \in A$ , существует единственная мера  $\bigotimes_{\alpha \in A} \mu_\alpha \in P(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha)$  (называемая тензорным произведением мер  $\mu_\alpha$ ) на произведении

$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ , удовлетворяющая условию: для любого конечного  $B \subset A$  и любых борелевских множеств  $Y_\alpha \subset X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , где  $Y_\alpha = X_\alpha$ , если  $\alpha \notin B$ , выполняется  $\bigotimes_{\alpha \in A} \mu_\alpha(\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha) = \prod_{\alpha \in A} \mu_\alpha(Y_\alpha)$ .

**Предложение 2.21.** Пусть  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  – семейство тихоновских пространств,  $\{cX_\alpha\}_{\alpha \in A}$  – семейство их компактификаций и  $\mu_\alpha \in \hat{P}(X_\alpha) \subset P(cX_\alpha)$ ,  $\alpha \in A$ , – семейство вероятностных радоновских мер. Если индексное множество  $A$  не более чем счетно, тогда  $\bigotimes_{\alpha \in A} \mu_\alpha \in \hat{P}(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha) \subset P(\prod_{\alpha \in A} cX_\alpha)$ .

*Доказательство.* Покажем, что мера  $\bigotimes_{\alpha \in A} \mu_\alpha$  принадлежит множеству  $\hat{P}(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha) \subset P(\prod_{\alpha \in A} cX_\alpha)$ . Для этого зафиксируем любое  $\varepsilon > 0$ . Поскольку множество  $A$  не более чем счетно, то существует инъекция  $\xi : A \rightarrow \mathbb{N}$ . Поскольку каждая мера  $\mu_\alpha \in \hat{P}(X_\alpha)$  – радоновская, то для каждого  $\alpha \in A$  существует такой компакт  $K_\alpha \subset X_\alpha \subset cX_\alpha$ , что  $\mu_\alpha(cX_\alpha \setminus K_\alpha) < \varepsilon/2^{-\xi(\alpha)}$ . Тогда для компакта  $\prod_{\alpha \in A} K_\alpha \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  выполняется неравенство  $(\bigotimes_{\alpha \in A} \mu_\alpha)(\prod_{\alpha \in A} cX_\alpha \setminus \prod_{\alpha \in A} K_\alpha) \leq \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha(cX_\alpha \setminus K_\alpha) < \sum_{\alpha \in A} \varepsilon/2^{-\xi(\alpha)} \leq \varepsilon$ . Следовательно,  $\bigotimes_{\alpha \in A} \mu_\alpha \in \hat{P}(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha)$ .  $\square$

**Замечание 2.22.** Из предложения 2.21 и известных фактов о тензорном произведении вероятностных мер на компактах следует, что для любого не более чем счетного множества вероятностных радоновских мер  $\mu_\alpha \in \hat{P}(X_\alpha)$ ,  $\alpha \in A$ , на тихоновских пространствах  $X_\alpha$ , существует единственная вероятностная радоновская мера  $\bigotimes_{\alpha \in A} \mu_\alpha \in \hat{P}(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha)$  (которую мы будем называть тензорным произведением мер  $\mu_\alpha$ ) такая, что для любых борелевских множеств  $Y_\alpha \subset X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , выполняется равенство  $(\bigotimes_{\alpha \in A} \mu_\alpha)(\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha) = \prod_{\alpha \in A} \mu_\alpha(Y_\alpha)$ .

**Замечание 2.23.** Предложение 2.21 неверно, если индексное множество  $A$  несчетно. Действительно, если каждая мера  $\mu_\alpha \in X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , имеет некомпактный носитель  $\text{supp}_{cX_\alpha}(\mu_\alpha) \cap X_\alpha$ , то, как можно показать, мера  $(\bigotimes_{\alpha \in A} \mu_\alpha)(K)$  любого компактного множества  $K \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \subset \prod_{\alpha \in A} cX_\alpha$  равна нулю.

Для каждого тихоновского пространства  $X$  положим  $\delta_X : X \rightarrow \hat{P}(X)$  – отображение, ставящее в соответствие каждой точке  $x \in X$  меру Дирака  $\delta(x)$ , сосредоточенную в точке  $x$ .

Из теоремы 1.14 следует

**Теорема 2.24.** Семейство  $\delta = \{\delta_X\}$  определяет естественное преобразование тождественного функтора  $\text{Id} : \text{Tych} \rightarrow \text{Tych}$  в функтор  $\hat{P} : \text{Tych} \rightarrow \text{Tych}$ , причем каждая компонента  $\delta_X : X \rightarrow \hat{P}(X)$  является замкнутым вложением.

Аналогично теореме 1.15 доказывается

**Теорема 2.25.** Функтор  $\hat{P}$  сохраняет плотность тихоновских пространств, т.е.  $d(\hat{P}(X)) = d(X)$  для любого бесконечного тихоновского пространства  $X$ .

Из утверждений 1.16—1.22, а также из леммы 2.17 следуют

**Теорема 2.26.** *Функтор  $\hat{P}$  сохраняет вес тихоновских пространств, т.е.  $w(\hat{P}(X)) = w(X)$  для любого бесконечного тихоновского пространства  $X$ .*

**Теорема 2.27.** *Функтор  $\hat{P}$  сохраняет класс метризуемых пространств.*

**Предложение 2.28.** *Функтор  $\hat{P}$  сохраняет полные по Чеху пространства.*

**Предложение 2.29.** *Если  $A$  – бэровское подмножество тихоновского пространства  $X$ , то функция  $\hat{\chi}_A : \hat{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ , где  $\hat{\chi}_A(\mu) = \mu(A)$ ,  $\mu \in \hat{P}(X)$ , является измеримой относительно  $\sigma$ -алгебры бэровских подмножеств  $\hat{P}(X)$ .*

**Теорема 2.30.** *Функтор  $\hat{P}$  сохраняет бэровские подмножества. Более того, для любого ординала  $\xi$ , если  $A \in \mathcal{M}_\xi(X)$ , то  $\hat{P}(A) \in \mathcal{M}_\xi(\hat{P}(X))$ ; для любого четного ординала  $\alpha$ , если  $A \in \mathcal{F}_\alpha(X)$ , то  $\hat{P}(A) \in \mathcal{F}_\alpha(\hat{P}(X))$ .*

Из теорем 2.2 и 2.27 следует

**Теорема 2.31.** *Функтор  $\hat{P}$  сохраняет класс  $p$ -паракомпактов.*

**Теорема 2.32.** *Функтор  $\hat{P}$  сохраняет проективные подмножества метрических компактов. Более того, для любого  $n \geq 0$ , если  $A \in \mathcal{P}_{2n}(X)$ , то  $\hat{P}(A) \in \mathcal{P}_{2n+1}(P(X))$ .*

*Доказательство.* Пусть  $X$  – метрический компакт. Для  $n = 0$  утверждение теоремы следует из теоремы 2.30. Через  $\text{exp}(X)$  обозначается гиперпространство непустых замкнутых подмножеств  $X$ , наделенное топологией Виеториса.

Теперь пусть  $n \geq 1$  и  $A \in \mathcal{P}_{2n}(X)$ . Тогда  $\hat{P}(A) = \{\mu \in P(X) \mid \mu_*(A) = 1\} = \{\mu \in P(X) \mid \text{для любого } m \geq 1 \text{ существует такой компакт } K \subset A, \text{ что } \mu(K) \geq 1 - \frac{1}{m}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \text{pr}_1(E_m)$ , где  $E_m = \{(\mu, K) \in P(X) \times \text{exp}(X) \mid K \subset A \text{ и } \mu(K) \geq 1 - \frac{1}{m}\}$  и  $\text{pr}_1 : P(X) \times \text{exp}(X) \rightarrow P(X)$  – проекция на первый сомножитель. Положим  $\text{exp}(A) = \{C \in \text{exp}(X) \mid C \subset A\}$ . В [13] доказано, что  $\text{exp}(A) \in \mathcal{P}_{2n}(\text{exp}(X))$ . Тогда для любого  $m \in \mathbb{N}$   $E_m = R(1 - \frac{1}{m}) \cap (P(X) \times \text{exp}(A))$ . Поскольку множество  $R(1 - \frac{1}{m}) \subset P(X) \times \text{exp}(X)$  – замкнуто (см. доказательство теоремы 1.22), то  $E_m \in \mathcal{P}_{2n}(P(X) \times \text{exp}(X))$ . Следовательно,  $\text{pr}_1(E_m) \in \mathcal{P}_{2n+1}(P(X))$  и  $\hat{P}(A) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \text{pr}_1(E_m) \in \mathcal{P}_{2n+1}(P(X))$  [12, §38, III, Теорема 3].  $\square$

**Замечание 2.33.** Если  $A$  – аналитическое подмножество компакта  $X$ , тогда  $\hat{P}(A) \in \mathcal{P}_4(P(X))$ . Это следует из теоремы 1.23 и равенства  $\hat{P}(A) = P_\tau(A)$ , которое является результатом того, что аналитические подмножества метрических компактов измеримы относительно любой меры.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банах Т.О., Радул Т.М. *Про функтор ймовірносних мір* // Доп. АН України. 1994. №8. С.16–20.
2. Федорчук В.В. *Вероятностные меры в топологии* // УМН. 1991. Т.46. Вып.1. С.41–80.
3. Чигогидзе А.Ч. *О продолжении нормальных функторов* // Вестник МГУ. Сер. мех-мат. 1984. №6. С.23–26.
4. Варадарайн В.С. *Меры на топологических пространствах* // Мат. сб. 1961. Т.55. №1. С.35–100.
5. Knowles J.G. *Measures on topological spaces* // Proc. London Math. Soc. 1967. V.17. №1. P.139–156.
6. Энгелькинг Р. *Общая топология*. М.: Мир, 1986.
7. Федерер Г. *Геометрическая теория меры*. М.: Мир, 1987.
8. Банах Т.О., Радул Т.Н. *Топология пространств вероятностных мер и геометрия их отображений*, препринт, 1994.
9. Федорчук В.В., Филиппов В.В. *Общая топология. Основные конструкции*. М.: Изд-во МГУ, 1988.
10. Банах Т.О., Телейко А.Б. *О независимости аксиом нормального функтора в категории компактов*, препринт, 1993.
11. Архангельский А.В. *Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства* // Мат. сб. 1965. Т.67, №1. С.55–85.
12. Куратовский К. *Топология, I*. М.: Мир, 1966.
13. Vanakh T. *Descriptive classes of sets and topological functors* // Укр. мат. журн. 1995.
14. Eilenberg S., Moore T. *Adjoint functors and triples* // Ill. J. Math. 1965. V.9. №3. P.381–398.
15. Федорчук В.В. *Об отображении барицентра вероятностных мер* // Вестн. МГУ. Сер. матем.-мех. 1992. №1. С.42–47.
16. Mill van J. *Infinite-Dimensional Topology: prerequisites and introduction*, North-Holland, Amsterdam, 1989.
17. Биркгоф Г., Барти Т. *Современная прикладная алгебра*. – М.: Мир, 1976.
18. Ditor S., Eiffler L. *Some open mapping theorems for measures* // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V.164. P.287–293.

Механіко-математичний факультет, Львівський університет, Університетська 1, Львів, 290602, Україна.

*Поступило 01.10.1994*

*После переработки 24.01.1995*