СКІЛЬКИ ЗБІЖНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ НЕОБХІДНО ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ РОЗРИВУ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ?

Т.О.Банах, Л.С.Здомський, С.І.Підкуйко

Анотація. Сім'я $\mathcal{F}$ підмножин метричного сепарабельного простору X називається *визначальною* в точці $x_0 \in X$, якщо неперервна у виколотому околі точки x_0 функція $f : X \to \mathbb{R}$ є неперервною в x_0 тоді й лише тоді, коли звуження $f|S \cup \{x_0\}$ неперевні в x_0 для кожної множини $S \in \mathcal{F}$. Доведено, що найменша потужність $|\mathcal{F}|$ визначальної в x_0 сім'ї $\mathcal{F}$ збіжних до x_0 послідовностей дорівнює малому кардиналу $\mathfrak{b}$, за умови, що жодна збіжна послідовність в X не є околом x_0. Для спадної до нуля послідовності $S = \{x_n\}_{n\in\omega} \subset (0, 1]$ такої, що $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}/x_n = 1$, доведено, що сім'я $\mathcal{F} = \{bS : \ b \in B\}$ — визначальна в $x_0 = 0$ для кожної множини $B \subset (0, \infty)$ другої категорії Бера.

A family $\mathcal{F}$ of subsets of a separable metric space X is called *continuity-detecting* at a point $x_0 \in X$, if each continuous on $X \setminus \{x_0\}$ function $f : X \to \mathbb{R}$ is continuous at x_0 if and only if the restriction $f|S \cup \{x_0\}$ is continuous for each $S \in \mathcal{F}$. It is shown that the smallest size $|\mathcal{F}|$ of a continuity-detecting family $\mathcal{F}$ of convergent to x_0 sequences in X is equal to the small cardinal $\mathfrak{b}$, provided no convergent sequence in X is a neighborhood of x_0. It is proved that for each decreasing to zero sequence $S = \{x_n\}_{n\in\omega} \subset (0, 1]$ with $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}/x_n = 1$ the family $\mathcal{F} = \{bS : \ b \in B\}$ is continuity-determining at $x_0 = 0$ for each subset $B \subset (0, \infty)$ of the second Baire category.

Добре відомо, що функція дійсної змінної $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною в точці $x_0 \in \mathbb{R}$ тоді й лише тоді, коли $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ для кожної збіжної до x_0 послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. У цьому контексті постає природне запитання: скільки збіжних до x_0 послідовностей досить взяти, щоб визначити, чи є довільна функція f неперервною в точці x_0? Якщо не накладати жодних обмежень на f, то відповідь очевидна: потрібно континуум таких послідовностей. Набагато цікавішим є питання, коли функція f є неперервною у виколотому околі x_0. У цьому випадку мінімальна кількість послідовностей, за допомогою яких можна встановити неперервність таких функцій в x_0, рівна малому кардиналу $\mathfrak{b}$, добре відомому в теорії множин.

Нагадаємо означення цього кардинала. Будемо говорити, що послідовність $(x_n) \in \mathbb{N}^\omega$ домінує послідовність $(y_n) \in \mathbb{N}^\omega$ (і позначати це символом $(y_n) \le^* (x_n)$), якщо $y_n \le x_n$ для всіх достатньо великих чисел n. Добре відомо, що, маючи зліченну сім'ю послідовностей $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}^\omega$, можна знайти послідовність $(y_n) \in \mathbb{N}^\omega$, яка домінує кожну послідовність (x_n) з множини $\mathcal{F}$. Найменша потужність $|\mathcal{F}|$ множини $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}^\omega$, для якої такої послідовності (y_n) не існує, і є кардиналом $\mathfrak{b}$. Більш формально, кардинал $\mathfrak{b}$ рівний найменшій потужності $|B|$ множини $B \subset \mathbb{N}^\omega$, яка є необмеженою в $(\mathbb{N}^\omega, \le^*)$ у тому сенсі, що не існує послідовності $(y_n) \in \mathbb{N}^\omega$ такої, що $(x_n) \le^* (y_n)$ для всіх $(x_n) \in X$.

Кардинал $\mathfrak{b}$ належить до категорії так званих малих кардиналів, тобто незлічeнних кардиналів, що не перевищують континуума $\mathfrak{c}$. Точне розташування цього кардинала на відрізку $[\aleph_1, \mathfrak{c}]$ залежить від додаткових теоретико-множинних припущень. Зокрема, $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ при Аксіомі Мартіна. Проте, існують моделі ZFC, у яких $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ (див. [1], [2]).

Поглянемо на описану вище проблему з дещо загальнішої точки зору.

Означення 1. Сім'ю $\mathcal{F}$ підмножин метричного простору X будемо називати

- *визначальною в точці* $x_0 \in X$, якщо довільна неперервна у виколотому околі x_0 функція $f : X \to [-1, 1]$ є неперервною в точці x_0 тоді й лише тоді, коли для кожної множини $S \in \mathcal{F}$ звуження $f|S \cup \{x_0\}$ — неперервне в x_0;

1991 *Mathematics Subject Classification.* 03E17, 03E35, 03E50, 26A03, 26A12, 26A15, 40A05, 54A25, 54A35, 54C05, 54C30, 54E35.

Key words and phrases. small cardinal , continuity , group action.

- *κ-контролюючою в точці $x_0 \in X$*, де κ – кардинал, якщо для довільної сім'ї $\mathcal{U}$ відкритих підмножин $X \setminus \{x_0\}$ з $|\mathcal{U}| \le \kappa$ і $x_0 \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{cl}_X(U)$ існує така множина $S \in \mathcal{F}$, що $x_0 \in \mathrm{cl}_X(U \cap S)$ для кожного $U \in \mathcal{U}$.

Під *характером* $\chi(x_0, X)$ точки x_0 топологічного простору X розуміємо мінімальну потужність бази околів x_0, див. [3, §1.1]. Наступне твердження розкриває взаємозв'язки між означеними вище поняттями.

Твердження 1. *Нехай $\mathcal{F}$ – сім'я підмножин у тихоновському просторі X з відміченою точкою x_0 зліченного характеру $\chi(x_0, X)$ в X.*

(i) *Якщо сім'я $\mathcal{F}$ визначальна в точці x_0, тоді вона 1-контролююча в x_0.*
(ii) *Сім'я $\mathcal{F}$ визначальна в точці x_0, якщо вона 2-контролююча в x_0.*
(iii) *Якщо сім'я $\mathcal{F}$ κ-контролююча в точці x_0, тоді вона λ-контролююча для кожного кардинала $\lambda \le \kappa$.*
(iv) *Якщо сім'я $\mathcal{F}$ 1-контролююча в точці x_0 і $\{O_n : n \in \omega\}$ – зліченна база околів точки x_0 в X, тоді сім'я $\{\bigcup_{n\in\omega} O_n \cap A_n : \forall n \in \omega \;\; A_n \in \mathcal{F}\}$ ω-контролююча в x_0.*

Доведення. (i) Припустимо, що сім'я $\mathcal{F}$ визначальна в x_0. Щоб довести, що вона 1-контролююча, зафіксуємо відкриту підмножину $U \subset X$ з $x_0 \in \mathrm{cl}_X(U)$.

Нехай $\{O_n : n \in \omega\}$ — зліченна база околів точки x_0 в X. Для кожного $n \in \omega$ виберемо точку $a_n \in O_n \cap U$. Без обмеження загальності можна вважати, що ці точки попарно різні. Використовуючи *тихоновість* простору X, виберемо попарно неперетинні околи $O(a_n) \subset U \cap O_n$ точок a_n, $n \in \omega$ і для кожного $n \in \omega$ знайдемо таку неперервну функцію $f_n : X \to [0, 1]$, що $f_n(a_n) = 1$ і $f_n^{-1}(0, 1] \subset O(a_n)$. Легко бачити, що функція $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n : X \to [0, 1]$ неперервна у всіх точках простору X крім x_0. Тепер із визначальності сім'ї $\mathcal{F}$ випливає існування такого $S \in \mathcal{F}$, що звуження f на $S \cup \{x_0\}$ розривне. Оскільки $f|X \setminus U \equiv 0$, то точка x_0 дотикається до перетину $S \cap U \supset S \cap f^{-1}(0, 1]$.

(ii) Тепер припустимо, що сім'я $\mathcal{F}$ 2-контролююча в точці x_0. Щоб довести її визначальність, зафіксуємо довільну неперервну в проколотому околі x_0 функцію $f : X \to \mathbb{R}$, яка розривна в x_0. Якщо існує границя $\lim_{x_0\ne x\to x_0} f(x) \ne f(x_0)$, тоді для довільного $S \in \mathcal{F}$ з $x_0 \in \mathrm{cl}_X(S)$ звуження $f|S \cup \{x_0\}$ розривне. Якщо ж границі $\lim_{x_0\ne x\to x_0} f(x)$ не існує, тоді можна знайти дві відкриті множини $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}$ з неперетинними замиканнями, прообрази яких $f^{-1}(U_i)$, $i \in \{1, 2\}$, дотикаються до точки x_0. Нехай $\dot{O}x_0$ – виколотий окіл x_0, у якому функція f неперервна. Застосовуючи 2-контролюючу властивість сім'ї $\mathcal{F}$ до відкритих множин $f^{-1}(U_i) \cap \dot{O}x_0$, $i \in \{1, 2\}$, знайдемо таку множину $S \in \mathcal{F}$, що перетини $S \cap f^{-1}(U_i) \cap Ox_0$, $i \in \{1, 2\}$, дотикаються до точки x_0. Очевидно, що звуження $f|S \cup \{x_0\}$ розривне.

Останні два пункти твердження 1 очевидні. □

Позначимо через $s_f(x_0, X)$ (відп. $s_\kappa(x_0, X)$) найменшу потужність $|\mathcal{F}|$ сім'ї $\mathcal{F}$ збіжних до x_0 послідовностей, яка є визначальною (відп. κ-контролюючою) в точці x_0.

Із твердження 1 випливає

Наслідок 1. *Якщо x_0 – точка зліченного характеру у тихоновському просторі X, тоді $s_f(x_0, X) = s_\kappa(x_0, X)$ для кожного $\kappa \in \mathbb{N}$ і $s_f(x_0, X) \le s_\omega(x_0, X) \le s_f(x_0, X)^\omega$.*

Для метричних сепарабельних просторів вдається знайти точне значення кардиналів $s_\kappa(x_0, X)$, $\kappa \le \omega$. У подальшому викладі нам знадобляться такі поняття.

Будемо називати підмножину $S \subset X$ топологічного простору X *послідовністю, збіжною до* x_0, якщо доповнення $S \setminus O(x_0)$ — скінченне для довільного околу $O(x_0)$ точки x_0 в X.

Підмножину S метричного простору (X, d) назвемо *узагальненою послідовністю, що прямує до* x_0, якщо для довільного околу $O(x_0) \subset X$ точки x_0 доповнення $S \setminus O(x_0)$ — рівномірно дискретне у тому сенсі, що $\inf\{d(x, y) : \; x, y \in S \setminus O(x_0), \; x \ne y\} > 0$. Зауважимо, що ці два поняття збігаються в цілком обмежених метричних просторах.

Теорема 1. *Нехай x_0 – неізольована точка метричного простору X і $\kappa < \mathfrak{b}$ – ненульовий кардинал. Якщо x_0 має окіл $O(x_0)$, що є збіжною до x_0 послідовністю, то $s_f(x_0, X) = s_\kappa(x_0, X) = 1$. Якщо такого околу не існує, тоді $s_f(x_0, X) = s_\kappa(x_0, X) = \mathfrak{b}$.*

Ми розіб'ємо доведення цієї теореми на ряд лем. Але спочатку введемо деякі позначення. Для точки x_0 метричного простору (X,d) та підмножини $S \subset X$ з $x_0 \in S$ розглянемо *функцію віддалі* від S,

$$\mathrm{dist}_S : X \to [0,\infty), \quad \mathrm{dist} : x \mapsto \mathrm{dist}(x,S) = \inf_{s\in S} d(s,x),$$

а також (неспадну) *функцію росту* цієї віддалі,

$$\rho_S : (0,\infty) \to [0,\infty), \quad \rho_S : R \mapsto \sup_{d(x,x_0)\le R} \mathrm{dist}(x,S).$$

Якщо S не є околом x_0, то $\rho_S(0,\infty) \subset (0,\infty)$.

Лема 1. *Нехай x_0 – неізольована точка метричного простору (X,d). Для довільної неспадної функції $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ існує така збіжна до x_0 узагальнена послідовність $S \subset X$, що $\rho_S < 2f$.*

Доведення. Покладемо $O_n = \{x \in X : d(x,x_0) < 2^{-n}\}$ для $n \ge 0$. Назвемо підмножину $A \subset X$ *ε-розділеною* для деякого $\varepsilon > 0$, якщо $d(a,b) \ge \varepsilon$ для всіх різних точок $a, b \in A$. Нехай S_0 — максимальна $f(1)$-розділена підмножина $X \setminus O_0$. Індукцією по n побудуємо послідовність множин $(S_n)_{n\ge1}$ таку, що $S_n \subset O_{n-1} \setminus O_n$ — максимальна множина, для якої об'єднання $S_0 \cup \cdots \cup S_n$ $f(2^{-n})$-розділене. Тоді об'єднання $S = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ є узагальненою послідовністю, що збігається до x_0, до того ж, $\rho_S(t) < 2f(t)$ для усіх $t \in (0,\infty)$. □

Будемо говорити, що сім'я $\mathcal{F}$ неспадних невід'ємних функцій на $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ є *обмеженою знизу за спаданням*, якщо існує така неспадна функція $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, що $g = o(f)$, $t \to 0_+$, для кожної функції $f \in \mathcal{F}$. Використовуючи означення кардинала $\mathfrak{b}$, нескладно довести наступне його еквівалентне означення.

Лема 2. *Кардинал $\mathfrak{b}$ рівний мінімальній потужності $|\mathcal{F}|$ сім'ї $\mathcal{F}$ додатних неспадних функцій на $\mathbb{R}_+$, яка є необмеженою знизу за спаданням.*

Використовуючи це еквівалентне означення, ми опишемо метод побудови насичених сімей малої потужності.

Лема 3. *Нехай $\mathcal{F}$ – така сім'я збіжних до x_0 послідовностей у метричному просторі (X,d), що множина функцій $\{\rho_S : S \in \mathcal{F}\}$ — необмежена знизу за спаданням. Тоді сім'я $\mathcal{F}$ є κ-контролюючою для кожного кардинала $\kappa < \mathfrak{b}$.*

Доведення. Припустимо, що множина функцій $\{\rho_S : S \in \mathcal{F}\}$ — необмежена знизу за спаданням. Зафіксуємо сім'ю $\mathcal{U}$ відкритих підмножин $X\setminus\{x_0\}$, які дотикаються до точки x_0 і припустимо, що $|\mathcal{U}| < \mathfrak{b}$. Розглянемо сім'ю функції $\{\rho_{X\setminus U} : U \in \mathcal{U}\}$. Оскільки ця сім'я має потужність $< \mathfrak{b}$, то вона обмежена знизу за спаданням, звідки випливає існування такої неспадної функції $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, що $f = o(\rho_{X\setminus U})$, $t \to 0_+$, для кожного $U \in \mathcal{U}$.

Оскільки сім'я функцій $\{\rho_S : S \in \mathcal{F}\}$ — необмежена знизу за спаданням, то існує така послідовність $S \in \mathcal{F}$, що $f \ne o(\rho_S)$, $t \to 0_+$, тобто

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \frac{f(t)}{\rho_S(t)} = C > 0. \quad (\star)$$

Для завершення доведення досить перевірити, що для кожної множини $U \in \mathcal{U}$ перетин $S \cap U$ — нескінченний. Із $(\star)$ випливає існування такої збіжної до нуля послідовності $(t_k) \subset (0,\infty)$, що $f(t_k) > (C/2)\rho_S(t_k)$ для усіх k. Оскільки $f = o(\rho_{X\setminus U})$ при $t \to 0_+$, то існує таке k_0, що $f(t_k) < (C/4)\rho_{X\setminus U}(t_k)$ для всіх $k \ge k_0$. Як наслідок, $(C/2)\rho_S(t_k) < (C/4)\rho_{X\setminus U}(t_k)$ і $\rho_{X\setminus U}(t_k) > 2\rho_S(t_k)$ для всіх $k \ge k_0$. Використовуючи означення величини $\rho_{X\setminus U}(t_k) > 2\rho_S(t_k)$, виберемо таку точку $x_k \in X$, що $d(x_k,x_0) \le t_k$ і $d(x_k, X\setminus U) > \rho_S(t_k)$. Із означення $\rho_S(t_k)$ випливає існування точки $s_k \in S$ на відстані $d(x_k,s_k) < d(x_k, X\setminus U) \le \rho_{X\setminus U}(t_k)$. Тоді $s_k \in U$ і перетин $U \cap S$ нескінченний, оскільки він містить збіжну до x_0 послідовність $(s_k)_{k\ge k_0}$. □

Перейдемо тепер безпосередньо до доведення теореми.

Доведення теореми 1. Нехай $x_0 \in X$ — неізольована точка сепарабельного метризовного простору X. Фіксуємо довільну цілком обмежену метрику d в X, що породжує топологію простору X. Випадок околу $O(x_0)$, що є збіжною послідовністю — тривіальний. Тому далі вважаємо, що жоден окіл $O(x_0)$ точки x_0 в X не є збіжною послідовністю. Згідно із наслідком 1, досить довести оцінки $\mathfrak{b} \le s_1(x_0, X) \le s_\omega(x_0, X) \le \mathfrak{b}$. З лем 1 і 2 випливає існування такої сім'ї $\mathcal{F}$ збіжних до x_0 послідовностей, що $|\mathcal{F}| \le \mathfrak{b}$ і множина функцій $\{\rho_S : S \in \mathcal{F}\}$ необмежена знизу за спаданням. Застосовуючи лему 3, отримуємо, що сім'я $\mathcal{F}$ ω-контролююча і, отже, $s_\omega(x_0, X) \le |\mathcal{F}| \le \mathfrak{b}$.

Для доведення нерівності $\mathfrak{b} \le s_1(x_0, x)$ досить показати, що довільна сім'я $\mathcal{F}$ збіжних до x_0 послідовностей не є 1-контролюючою, якщо $|\mathcal{F}| < \mathfrak{b}$. Позначимо через K поповнення цілком обмеженого метричного простору X. Оскільки точка x_0 не має околів, що є збіжними до x_0 послідовностями, то існує збіжна до x_0 послідовність $(y_n) \subset K \setminus \{x_0\}$ неізольованих точок компакта K. Покладемо $Y = \{x_0, y_n : n \in \omega\}$. Для кожної послідовності $S \in \mathcal{F}$ виберемо послідовність $\vec{m}^S = (m_i^S) \in \mathbb{N}^\omega$ так, щоб для довільних $i \in \omega$ та $s \in S \setminus Y$ справджувалася нерівність $d(s, y_i) > 2^{-m_i^S}$. Оскільки множина послідовностей $B = \{\vec{m}^S : S \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{N}^\omega$ має потужність $|B| \le |\mathcal{F}| < \mathfrak{b}$, то існує така послідовність $\vec{m} = (m_i) \in \mathbb{N}^\omega$, що $\vec{m}^S \le^* \vec{m}$ для всіх $S \in \mathcal{F}$. Тепер розглянемо відкриту множину $W = \bigcup_{i\in\omega} B(y_i, 2^{-m_i})$, яка містить x_0 у своєму замиканні. З вибору послідовностей $\vec{m}^S \le^* \vec{m}$ випливає, що для кожної послідовності $S \in \mathcal{F}$ перетин $S \cap W$ — скінченний. Це означає, що сім'я $\mathcal{F}$ не є 1-контролюючою. □

З теореми 1 та поведінки кардинала $\mathfrak{b}$ за різних аксіоматичних припущень (див. [2]) випливає

Наслідок 2. *Нехай X – метричний сепарабельний простір і $x_0 \in X$ – точка, жоден окіл якої не є збіжною до x_0 послідовністю. Тоді $s_f(x_0, X) = \mathfrak{c}$ при Аксіомі Мартіна. Проте існують моделі ZFC, при яких $s_f(x_0, X) < \mathfrak{c}$.*

Застосовуючи теорему 1 до точки $x_0 = 0$ відрізка $X = [0, 1]$, бачимо, що існує сім'я $\mathcal{F}$ спадних до нуля послідовностей дійсних чисел потужності $|\mathcal{F}| = \mathfrak{b}$, яка дозволяє визначити існування границі в нулі у тому сенсі, що неперервна функція $f : (0, 1] \to [-1, 1]$ має границю $\lim_{x\to+0} f(x)$ тоді й лише тоді, коли для кожної послідовності $(x_n) \in \mathcal{F}$ існує границя $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Однак, побудована у доведенні цієї теореми сім'я $\mathcal{F}$ містить якзавгодно повільно спадні до нуля послідовності. Виявляється, що можна також знайти *одну* збіжну до нуля послідовність $(x_n) \subset [0, \infty)$, сім'я гомотетичних копій якої $\mathcal{H} = \{(ax_n)_{n\in\omega} : a > 0\}$ є ω-котролюючою (і, як наслідок, визначальною) в точці $x_0 = 0$. Тоді усі послідовності цієї сім'ї еквівалентні в сенсі $\vec{x} = O^*(\vec{y})$ для $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. При дослідженні структури таких послідовностей (x_n) природно виникають ще три малих кардинали: $\mathrm{add}(\mathcal{M})$, $\mathrm{non}(\mathcal{M})$ та $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$. Тут $\mathcal{M}$ – σ-ідеал усіх множин I-ї категорії Бера на прямій, а

$$\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{|\mathcal{I}| : \mathcal{I} \subset \mathcal{M},\ \cup\mathcal{I} \notin \mathcal{M}\};$$
$$\mathrm{non}(\mathcal{M}) = \min\{|A| : A \subset \mathbb{R},\ A \notin \mathcal{M}\};$$
$$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \min\{|\mathcal{I}| : \mathcal{I} \subset \mathcal{M},\ \cup\mathcal{I} = \mathbb{R}\}.$$

Для цих кардиналів очевидними є співвідношення: $\mathrm{add}(\mathcal{M}) \le \min\{\mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathrm{cov}(\mathcal{M})\} \le \mathfrak{c}$. Менш очевидно, що $\mathrm{add}(\mathcal{M}) \le \mathfrak{b} \le \mathrm{non}(\mathcal{M})$, див. [2] (це випливає з того, що σ-ідеал $\mathcal{M}$ містить усі компактні підмножини множини ірраціональних чисел, яка гомеоморфна зліченному добутку $\mathbb{N}^\omega$ за теоремою Александрова-Урисона [5, 7.7]). При Аксіомі Мартіна усі ці кардинали рівні континууму, проте існують моделі ZFC, за яких $\max\{\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathrm{non}(\mathcal{M})\} < \mathfrak{c}$, див. [2].

Теорема 2. *Для спадної до нуля послідовності $S = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ додатних дійсних чисел наступні умови еквівалентні:*

(i) $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$*;*

(ii) *для кожної відкритої множини $U \subset (0, \infty)$, яка дотикається до нуля, множина $\{a > 0 : aS \cap U \ne \emptyset\}$ відкрита і всюди щільна на півосі $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$;*

(iii) *сім'я $\mathcal{F} = \{aS : a \in \mathbb{R}_+\}$ ω-контролююча в точці $x_0 = 0$;*

(iv) *для кожної відкритої множини $U \ni 1$ на півосі $\mathbb{R}_+$ сім'я $\mathcal{F} = \{aS : a \in U\}$ визначальна в точці $x_0 = 0$;*

(v) *для кожної множини B другої категорії Бера на осі $\mathbb{R}_+$ сім'я $\mathcal{F} = \{aS : a \in B\}$ визначальна в точці $x_0 = 0$.*

(vi) *для кожної відкритої множини $W \ni 1$ на півосі $\mathbb{R}_+$ сім'я $\mathcal{F} = \{aS : a \in W\}$ κ-контролююча в точці $x_0 = 0$ для кожного нескінченного кардинала $\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$;*

(vii) *для кожної множини B другої категорії Бера на осі $\mathbb{R}_+$ сім'я $\mathcal{F} = \{bS : b \in B\}$ κ-контролююча в точці $x_0 = 0$ для кожного нескінченного кардинала $\kappa < \mathrm{add}(\mathcal{M})$.*

Доведення. Ми доведемо імплікації (i)⇒(ii)⇔(iii)⇒ (v)⇒(iv)⇒(i) та (ii)⇒(vi,vii)⇒(iii).

(i)⇒(ii) Припустимо, що існує границя $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ і зафіксуємо довільну відкриту підмножину $U \subset (0, \infty)$, яка дотикається до нуля. Легко бачити, що множина $A = \{a > 0 : aS \cap U \neq \emptyset\}$ відкрита в $\mathbb{R}_+$. Щоби довести її всюди щільність в $\mathbb{R}_+$, зафіксуємо довільну точку $a \in \mathbb{R}_+$ та її окіл $W \subset \mathbb{R}_+$. Знайдемо таке $\varepsilon > 0$, що $(a(1-\varepsilon), a] \subset W$. Далі, підберемо таке $m \in \mathbb{N}$, що $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 - \varepsilon$ для всіх $n \geq m$. Ми стверджуємо, що WS містить інтервал $(0, ax_m)$. Дійсно, для кожної точки $t \in (0, ax_m)$ можна знайти таке $n \geq m$, що $t \in (ax_{n+1}, ax_n]$. Оскільки $\frac{t}{ax_n} > \frac{ax_{n+1}}{ax_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 - \varepsilon$, то $t \in (a(1-\varepsilon), a] \cdot x_n \subset WS$. Із включень $(0, ax_m) \subset WS$ та $0 \in \bar{U}$ випливає, що $WS \cap U \neq \emptyset$, звідки $W \cap A \neq \emptyset$.

(ii)⇒(iii) Нехай $\{U_n : n \in \omega\}$ – зліченна сім'я відкритих підмножин на півосі $\mathbb{R}_+$, котрі дотикаються до нуля. Із умови (ii) випливає, що для довільних $n, m \in \omega$ множина $A_{n,m} = \{a > 0 : aS \cap U_n \cap (0, 2^{-m}] \neq \emptyset\}$ відкрита і всюди щільна на півосі $\mathbb{R}_+$. За теоремою Бера, перетин $\bigcap_{n,m\in\omega} A_{n,m}$ містить деяку точку $a > 0$. Для цієї точки усі перетини $aS \cap U_n$ нескінченні, що доводить ω-контролюючість послідовності S.

(iii)⇒(ii) Припустимо, що сім'я $\{aS : a > 0\}$ ω-контролююча в $x_0 = 0$. Зафіксуємо довільну відкриту множину $U \subset \mathbb{R}_+$, яка дотикається до нуля. Покажемо, що множина $A = \{a > 0 : aS \cap U \neq \emptyset\}$ всюди щільна на півосі $\mathbb{R}_+$. Позначимо через $\mathbb{Q}_+$ множину додатніх раціональних чисел і розглянемо зліченну сім'ю $\{qU : q \in \mathbb{Q}_+\}$ відкритих множин в $\mathbb{R}_+$, які дотикаються до нуля. Оскільки сім'я $\{aS : a > 0\}$ ω-контролююча, то існує таке $a > 0$, що $aS \cap qU \neq \emptyset$ для кожного додатного раціонального числа q. Тоді $\mathbb{Q}_+ a \in A$ і, отже, множина A всюди щільна на півосі.

(ii)⇒(v) Припустимо, що $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ – функція, яка неперервна в точці півосі $\mathbb{R}_+$, але розривна в $x_0 = 0$. Необхідно знайти таке $b \in B$, що звуження $f|bS \cup \{0\}$ розривне.

Якщо границя $A = \lim_{x\to+0} f(x)$ існує, тоді $A \neq f(x_0)$ і для кожного $b \in B$ звуження $f|bS \cup \{0\}$ розривне в нулі. Якщо ж границі $\lim_{x\to+0} f(x)$ не існує, тоді можна знайти дві відкриті підмножини $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}$ з неперетинними замиканнями, прообрази $f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)$ яких дотикаються до нуля. Із умови (ii) випливає, що перетин

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i=1}^{2} \{a > 0 : aS \cap f^{-1}(U_i) \cap (0, 2^{-n}) \neq \emptyset\}$$

є всюди щільною G_δ-множиною на півосі $\mathbb{R}_+$. Тоді для множини B другої категорії Бера перетин $G \cap B$ містить деяку точку $b > 0$. Для цієї константи b послідовність bS має нескінченний перетин з множинами $f^{-1}(U_i)$, $i = 1, 2$. Як наслідок, звуження $f|bS \cup \{0\}$ розривне в нулі.

Імплікація (v)⇒(iv) тривіальна. Щоб довести імплікацію (iv)⇒(i), припустимо, що $C = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тоді для $\varepsilon = (1-C)/2$ множина $N = \{n \in \mathbb{N} : x_{n+1} < (1-\varepsilon)x_n\}$ нескінченна. Розглянемо відкриту множину $U = \bigcup_{n\in N} \big((1 - 2\varepsilon/3)x_n, (1-\varepsilon/3)x_n\big)$, яка дотикається до нуля, і зауважимо, що для всіх $a \in (1-\varepsilon/3, 1+\varepsilon/3)$ перетин $aS \cap U$ порожній. Нехай $f : (0, \infty) \to [0, 1]$ — неперервна функція з носієм $\overline{f^{-1}(0, 1]} \subset U$, яка не має границі $\lim_{x\to+0} f(x)$. Доозначимо f в нулі, поклавши $f(0) = 0$. Оскільки $f|aS \equiv 0$, то умова (iv) не виконується, що доводить імплікацію (iv)⇒(i).

(ii)⇒(vi,vii) Зафіксуємо нескінченний кардинал κ, а також сім'ю $\mathcal{U}$ потужності $|\mathcal{U}| \leq \kappa$, що складається з відкритих підмножин на півосі $\mathbb{R}_+$, котрі дотикаються до нуля. Із умови (ii) випливає, що для довільних $U \in \mathcal{U}$, $m \in \omega$ множина $G_{U,m} = \{a > 0 : aS \cap U \cap (0, 2^{-m}) \neq \emptyset\}$ відкрита і всюди щільна на півосі $\mathbb{R}_+$. Зауважимо, що $|\{G_{U,m} : U \in \mathcal{U},\ m \in \omega\}| \leq \aleph_0 \cdot |\mathcal{U}| \leq \kappa$ і розглянемо перетин $A = \bigcap\{G_{U,m} : U \in \mathcal{U},\ m \in \omega\}$.

Якщо $\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$, тоді, із означення кардинала $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ випливає, що множина A всюди щільна на прямій і, отже, має спільну точку a з довільним околом $W \subset \mathbb{R}_+$ одиниці. Для цієї точки a перетин $aS \cap U$ нескінченний для кожного $U \in \mathcal{U}$. Це означає, що сім'я $\{aS : a \in W\}$ κ-контролююча в точці $x_0 = 0$.

Якщо $\kappa < \mathrm{add}(\mathcal{M})$, тоді з означення кардинала $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ випливає, що множина A містить всюди щільну G_δ-множину G півосі $\mathbb{R}_+$. Ця множина $G \subset A$ має спільну точку a з довільною множиною $B \subset \mathbb{R}_+$ другої категорії. Для цієї точки a перетин $aS \cap U$ нескінченний для кожного $U \in \mathcal{U}$. Це означає, що сім'я $\{aS : a \in B\}$ κ-контролююча в точці $x_0 = 0$.

Нарешті, тривіальні імплікації (vi,vii)$\Rightarrow$(iii) завершують доведення теореми. □

Застосовуючи до півосі $\mathbb{R}_+$ перетворення $\frac{1}{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ та $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, отримуємо два цікавих наслідки з теореми 2.

Наслідок 3. *Нехай $S = \{x_n : n \in \omega\}$ зростаюча до нескінченності послідовність дійсних чисел з $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ і B– множина другої категрії Бера на півосі $\mathbb{R}_+$. Неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має границю $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ тоді і лише тоді, коли для кожного $b \in B$ існує границя $\lim_{n\to\infty} f(bx_n)$.*

Наслідок 4. *Нехай $S = \{x_n : n \in \omega\}$ зростаюча до нескінченності послідовність дійсних чисел з $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = 0$ і B– множина другої категрії Бера на півосі $\mathbb{R}_+$. Неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має границю $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ тоді і лише тоді, коли для кожного $b \in B$ існує границя $\lim_{n\to\infty} f(b + x_n)$.*

Наслідок 3 узагальнює задачу III.2.59* (підвищеної складності) із [4], в якій пропонується довести, що неперервна функція $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ має границю $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ за умови, що $\lim_{n\to\infty} f(an) = 0$ для всіх $a > 0$. За розв'язком цієї задачі А.Я.Дороговцев відсилає читача до статті [6] та збірника [7, с.97].

Як видно з теореми 2, для спадної до нуля послідовності $S \subset \mathbb{R}_+$ сім'я $\{aS : a > 0\}$ є ω-контролюючою в нулі тоді і лише тоді, коли множина $\{aS : a \in U\}$ визначальна в нулі для кожного околу одиниці. Подібна характеризація справедлива і для 1-контролюючої властивості, див. [8].

Теорема 3. *Для спадної до нуля послідовності $S = \{x_n : n \in \omega\} \subset (0, +\infty)$ сім'я $\{aS : a > 0\}$ визначальна в нулі тоді і лише тоді, коли вона 1-контролююча в нулі. У цьому випадку мають місце оцінки $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln n} = 0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.*

Із теореми 2 випливає, що для послідовності $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ та довільної множини B другої категорії на $\mathbb{R}_+$ сім'я $\mathcal{F} = \{bS : \ b \in B\}$ є визначальною в нулі. Зауважимо, що найменша потужність множини другої категорії на прямій рівна кардиналу $\mathrm{non}(\mathcal{M})$.

Проблема 1. *Нехай $\mathcal{F}$ – визначальна сім'я збіжних до нуля послідовностей на $(0,1)$, для якої сім'я функцій $\{\rho_S : S \in \mathcal{F}\}$ обмежена знизу за спаданням. Чи правда, що $|\mathcal{F}| \ge \mathrm{non}(\mathcal{M})$?*

Література

[1] E.K. van Douwen, *The Integers and Topology*, Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J.E.Vaughan, editors, Elsevier Science Publishers, 1984, 111–167.

[2] J.E. Vaughan, *Small uncountable cardinals and topology*, in: J. van Mill, G.M. Reed (eds). *Open problems in topology*, (Elsevier Sci. Publ., 1990) 197–216.

[3] Р. Энгелькинг, *Общая Топология*, М.: Мир, 1986.

[4] А.Я.Дороговцев, *Математический анализ: Сборник задач*, К.: "Вища Школа", 1987.

[5] A.Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1995.

[6] M.Leif, *Om ligelig kontinuitet i uendelig* // Nordisk Math. Tidskr. Bd.24, Hf.2. (1976), 71–74.

[7] М.Г.Голузин, А.А.Лодкин, Б.М.Макаров, А.Н.Подкорытов, *Задачи по математическому анализу*, Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983.

[8] T.Banakh, S.Pidkuyko, *A game characterization of limit-detecting sequences in locally compact G-spaces*, preprint.

Львівський національний університет імені Івана Франка
E-mail address: tbanakh@franko.lviv.ua
E-mail address: pidkuyko@farlep.lviv.ua